# ACADÉMIE DES SCIENCES.

## SÉANCE DU LUNDI 16 OCTOBRE 1911.

PRÉSIDENCE DE M. ARMAND GAUTIER.

---

## MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

### AÉRONAUTIQUE. — *Vitesse de régime des parachutes.* Note de M. Ch. Bouchard.

Admettant que la vitesse de chute est dangereuse pour l'homme quand elle atteint 8 mètres par seconde, admettant aussi que la vitesse de chute dépend du rapport entre le poids P et la projection horizontale S de la surface portante sur laquelle la résistance de l'air exerce son action, j'ai cherché à déterminer expérimentalement un certain nombre de vitesses pour des rapports $\frac{P}{S}$ variant entre 0,4 et 0,1, P étant compté en grammes, S en centimètres carrés. J'ai dû adopter la méthode des mesures directes parce que je savais, par des témoignages autorisés, que pour cet ordre de vitesses, les expériences ont été rares, peu concordantes ou contradictoires, et qu'elles ont, le plus souvent, été faites par les méthodes indirectes. Je savais, d'autre part, que le calcul de ces vitesses, fait en appliquant les formules mécaniques, avait conduit à des résultats manifestement faux, le coefficient de la résistance de l'air qui a été déterminé pour la chute des ballons n'étant pas applicable aux chutes qui m'intéressaient, bien qu'elles fussent de même ordre. Il fallait tenir compte de la différence des formes des surfaces, concaves pour le parachute ou l'aéroplane, convexes pour le ballon.

J'ai fait usage d'un parachute conique de $60^{cm}$ de diamètre attaché par son bord à un cercle fixé perpendiculairement sur une tige légère mesurant $1^{m},60$ depuis le sommet du cône jusqu'à son extrémité inférieure. A cette extrémité inférieure, on attachait des poids choisis de telle sorte que le poids total fût, avec la projection horizontale du parachute, dans les rapports de 0,4, 0,35, 0,3, 0,25, 0,2, 0,15, 0,1. J'ai multiplié les expériences avec chacun de ces $\frac{P}{S}$ et pour chacun d'eux la hauteur de chute a été de $2^{m},25$, $3^{m},53$, $9^{m},45$. Les procédés habituels de la méthode graphique m'ont permis de tracer pour chaque $\frac{P}{S}$, une courbe où je pouvais mesurer la durée de la chute pour chaque mètre consécutif. Cette durée allait graduellement en diminuant : en d'autres termes la vitesse s'accélérait graduellement; mais graduellement aussi l'accélération diminuait, de sorte qu'on arrivait à constater, pour un mètre, une durée de chute égale à la durée de chute du mètre précédent. Le mouvement était devenu uniforme, la vitesse de régime était établie et facile à calculer. J'obtins les résultats suivants :

| $\frac{P}{S}$. | Début du mouvement uniforme à partir du commencement de la chute. | Vitesse de régime. |
|---|---|---|
| | s | m |
| 0,4 | 1,70 | 7,69 |
| 0,35 | 1,10 | 6,90 |
| 0,3 | 1,15 | 6,33 |
| 0,25 | 1,50 | 5,95 |
| 0,2 | 2,50 | 4,76 |
| 0,15 | 2,20 | 4,00 |
| 0,1 | 2,60 | 2,63 |

Au premier coup d'œil, les résultats semblaient satisfaisants; cependant la vitesse correspondant au $\frac{P}{S}$ 0,1 paraissait trop faible. Je voulus contrôler mes résultats par l'application de la formule de la résistance de l'air : $R = \varphi S V^2$, $\varphi$ étant le coefficient de résistance de l'air. Quand le mouvement devient uniforme, cela tient à ce que la pesanteur cesse d'être supérieure à la résistance, à ce que la résistance R est égale au poids P. A ce moment, $P = \varphi S V^2$, d'où $\varphi = \frac{P}{S} \times \frac{1}{V^2}$. Je cherchai donc si le calcul d'après $\frac{P}{S}$ et $V^2$ allait me donner une constante. J'obtins les résultats suivants :

| $\frac{P}{S}$. | V. | $\frac{P}{S} \times \frac{1}{V^2}$. |
|---|---|---|
| | m | |
| 0,4 | 7,69 | $\varphi = 0,0068$ |
| 0,35 | 6,90 | $\varphi = 0,0074$ |
| 0,3 | 6,33 | $\varphi = 0,0075$ |
| 0,25 | 5,95 | $\varphi = 0,0071$ |
| 0,2 | 4,76 | $\varphi = 0,0088$ |
| 0,15 | 4,00 | $\varphi = 0,0090$ |
| 0,1 | 2,63 | $\varphi = 0,0147$ |

Il en résultait que $\varphi$ n'était pas une constante ; il augmentait à mesure que la vitesse diminuait. J'en devais conclure ou que mes expériences étaient erronées ou que la formule est inexacte.

M. V. Balthazard, auquel je soumis ces résultats, me tira de ma perplexité. Il estima que dans la formule $R = \varphi SV^2$ on n'est pas tenu absolument à l'exposant $V^2$, qu'on peut essayer V ou $V^3$. C'est ce que m'expliqua aussi M. D. Berthelot après qu'il eut pris connaissance des corrections faites par M. Balthazard : V conviendrait pour les vitesses d'amortissement, des systèmes oscillants, balances, pendules, vitesses qui peuvent n'être que de quelques centimètres, $V^2$ pour les vitesses d'aéroplanes de $20^m$ à $50^m$, $V^3$ pour les vitesses balistiques de $200^m$ à $300^m$. M. Balthazard qui avait fait ces divers essais n'y trouvait pas la solution cherchée. Il eut alors l'idée de prendre la racine carrée du cube de V : $V^{\frac{3}{2}}$. Il obtint alors les résultats suivants :

| $\frac{P}{S}$. | V. | $V^{\frac{3}{2}}$. | $\frac{P}{S} \times V^{\frac{3}{2}}$. |
|---|---|---|---|
| 0,4 | 7,69 | 21,33 | $\varphi = 0,0188$ |
| 0,35 | 6,90 | 18,15 | $\varphi = 0,0193$ |
| 0,3 | 6,33 | 15,93 | $\varphi = 0,0188$ |
| 0,25 | 5,95 | 14,51 | $\varphi = 0,0172$ |
| 0,2 | 4,76 | 10,38 | $\varphi = 0,0193$ |
| 0,15 | 4,00 | 8,00 | $\varphi = 0,0188$ |
| 0,1 | 2,63 | 4,23 | $\varphi = 0,0236$ |

En adoptant la moyenne $\varphi = 0,019$, on a à 2 dix-millièmes près le coefficient de la résistance de l'air qui convient à ces vitesses qui n'atteignent pas $8^m$. Il y a un léger écart pour la vitesse qui correspond à $\frac{P}{S} = 0,25$, une autre considération pour $\frac{P}{S} = 0,1$. Il se peut que mon expérience ait été défectueuse. Il se pourrait plutôt, me disait M. D. Berthelot, qu'on entre avec

$\frac{P}{S} = 0,1$ dans un autre ordre de vitesse réclamant un exposant de V plus rapproché de l'unité. $\varphi = 0,019$ serait le coefficient de la résistance de l'air applicable aux vitesses de parachute, et de chute d'aéroplanes, avec la formule $R = 0,019 \frac{P}{S} V^{\frac{3}{2}}$, pour les valeurs de $\frac{P}{S}$ comprises entre 0,4 et 0,15, seules valeurs susceptibles d'être adoptées pour assurer la sécurité des aviateurs.

M. **Alfred Picard** fait hommage à l'Académie d'un Volume intitulé : *Commission permanente des valeurs de douane. Session de* 1911. *Rapport du Président de la Commission à M. le Ministre du Commerce et de l'Industrie.*

## CORRESPONDANCE.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale, parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

1° *L'internationalisme scientifique*, par P.-H. Eijkman.

2° *Bericht über den II. internationalen Kältekongress. Wien*, 1910, 6-12. *Oktober*. (Hommage de l'Association internationale du Froid.)

3° Trois Volumes du *Recueil de l'Institut botanique Léo Errera*, publié par Jean Massart.

ASTRONOMIE. — *Observations de la comète Beljawsky* (1911 *g*), *faites à l'Observatoire de Marseille, au chercheur de comètes.* Note de M. **Borrelly.**

| Dates. 1911. | Temps moyen de Marseille. | Différence en Æ. | Différence en ℘. | Nombre de compar. | Æ apparente. | Log. fact. parall. | Dist. polaire apparente. | Log. fact. parall. | ★. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | h m s | m s | ′ ″ | | h m s | | ° ′ ″ | | |
| Oct. 1.... | 16.42.23 | −0.23,38 | −7.28,8 | 5:5 | 11.14. 6,88 | $\bar{1}$,638 | 79.38.16,9 | −0,768 | *a* |
| » 2.... | 17.15.14 | +6.38,73 | +1.33,5 | 5:5 | 11.25.56,14 | $\bar{1}$,635 | 79. 0.23,2 | −0,758 | *b* |

*Position des étoiles de comparaison.*

| ★. | Gr. | Æ moyenne 1911,0. | Réduction au jour. | Dist. polaire moyenne 1911,0. | Réduction au jour. | Autorités. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | h m s | s | ° ′ ″ | ″ | |
| *a*....... | 8,4 | 11.14.29,61 | +0,65 | 79.45.43,1 | +2,6 | 4264, Leipzig, I, A.G. |
| *b*....... | 4 | 11.19.16,72 | +0,69 | 78.58.46,7 | +3,0 | 4280, Leipzig, I, A.G. |

*Remarques.* — Le 1[er] octobre la comète est très éclatante et visible à l'œil nu. Elle a une queue brillante qui s'étend jusqu'à 15° du noyau; son éclat surpasse celui de la lumière zodiacale qui brille à côté. Le noyau, en forme de poire, est complètement dénudé de chevelure du côté du Soleil; son éclat est de 2[e]-3[e] grandeur.

Le 2 octobre, l'aspect de la comète a complètement changé, le noyau de 2[e] grandeur est entouré tout autour d'une belle chevelure et est parfaitement rond, deux aigrettes se montrent à droite et à gauche, la queue est plus faible que la veille. Il est grand jour que l'astre est encore visible.

MÉCANIQUE CÉLESTE. — *Sur la variation dans le mouvement de la Lune.* Note de M. **Nicolau**, présentée par M. H. Poincaré.

Ayant considéré les équations

$$(1)\qquad c_{\pm j}=\sum_{1}^{j-1}\frac{i}{j}\left[\frac{4i(j-i)(j\mp 1\mp p)}{\Delta_j}-1\right]c_{\pm i}\,c_{\mp j\pm i}-\frac{3\lambda}{16j^2}\,\frac{\theta_{\pm 1}}{\Delta_j}\sum_{0}^{j-1}c_i\,c_{j-i-1},$$

$\Delta_j$, $\theta_{\pm 1}$ étant des polynomes du second degré en $j$, obtenues des équations de Hill par les transformations (1), (2) de ma Note précédente (*Comptes rendus*, 13 mars 1911), j'ai formé le système d'équations différentielles auxquelles satisfont les fonctions $y$, $z$ de la même Note. C'est un système du huitième ordre d'équations non linéaires. Puis, par des substitutions qui permettent de changer ces équations en majorantes, j'obtiens l'équation

$$(2)\qquad x\frac{dY}{dx}-bY=(1-b)\,c_1x+axY+(a'+a''x)\,\frac{Y^2}{1-Y},$$

la fonction Y qu'elle définit, holomorphe aux environs de $x$ et qui s'annule avec $x$, étant une majorante commune à $y$, $z$. Toutefois, la difficulté n'en était pas moins grande pour déduire de là une limite convenable de $c_{\pm j}$. Cela tient principalement à ce que $1-b$ est trop petit devant les autres coefficients numériques. Et, d'ailleurs, soit d'après la majorante de Weierstrass, soit d'après cette autre majorante

$$(3)\qquad (1-b)\,Z=(1-b)\,c_1x+axZ+(a'+a''x)\,\frac{Z^2}{1-Z},$$

il est aisé de voir que le développement de Z, donc aussi celui de Y, ne converge que dans un cercle fort restreint. Aussi a-t-il été nécessaire de construire une majorante plus serrée. Mais on constate, par les formules de

récurrence tirées de (3), que le coefficient général du développement de Z, c'est-à-dire la limite supérieure de $c_{\pm j}$, est de l'ordre de

$$\left(\frac{3}{16}\lambda\right)^j.$$

Je reprends donc les équations (1), et, par la transformation nouvelle

$$c_{\pm j} = \left(\frac{3}{16}\lambda\right)^j e_j, \tag{4}$$

j'obtiens l'équation de la forme

$$e_j = \sum_1^{j-1} \frac{\alpha_{\pm 1}}{\beta_{\pm 1}} e_i e_{j-i} \qquad (\lambda = 1); \tag{5}$$

les $\alpha_{\pm 1}$ étant des polynomes du 2^e^ degré en $i$ et du 3^e^ en $j$ ; les $\beta_{\pm 1}$, du 4^e^ en $j$. Pour définir ensuite $e_j$ qui convienne d'après (4) à une limite supérieure de $c_{\pm j}$, je prends toujours $p$ entre 0 et 1 ; mais dans cet intervalle, et pour $1 \leqq i \leqq j-1$, je cherche une majorante *absolue* de (5). Dans ces conditions, $\alpha_{\pm 1}$ étant négatifs comme fonctions de $i$, je remplace les rapports $\alpha_{\pm 1} : \beta_{\pm 1}$ par les maxima $A_{\pm 1}$ de leurs valeurs absolues, lesquels ont lieu pour $i = j - 1$ ; puis je cherche les maxima des $A_{\pm 1}$, qui deviennent ainsi des fonctions de $j$. La conclusion est que $A_{-1} > 1$ n'est jamais possible, et $A_1 > 1$ n'a lieu que dans l'intervalle : $\left(\frac{1}{2} < j < \frac{3}{2}\right)$; mais là, $A_1$ peut devenir très grand, ainsi qu'il arrivera par exemple pour $j = 1$, lorsque $p$ sera voisin de la racine positive de $19p^2 + 68p - 30 = 0$. Seulement, cette circonstance est à écarter, vu que $j$ doit être un entier *au moins* égal à 2. Alors, $A_{\pm 1} \leqq 1$. Et comme $A_{\pm 1} = 1$ pour $j = \infty$, à ce maximum des $A_{\pm 1}$ correspondra l'équation

$$e_j = \sum_1^{j-1} e_i e_{j-i},$$

définissant la majorante la plus *forte*. Or, cette équation est précisément celle de ma Note indiquée plus haut, lorsque $\lambda = 0$, et de laquelle j'ai déjà donné une solution asymptotique. C'est donc cette solution qu'il convient d'adopter comme limite supérieure des $a_{\pm j}$, pour $j \leqq 2$, c'est-à-dire des inégalités variationnelles secondaires.

GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. — *Sur les surfaces* R *et les surfaces* Ω. Note [1] de M. A. **Demoulin**.

1. Dans notre Note du 25 septembre 1911, nous avons établi que la transformation de Lie fait correspondre à toute surface isothermique (M) un réseau R dont une des tangentes $d$ appartient au complexe linéaire L qui définit la transformation.

Supposons que la sphère $\Sigma_1$ coupe une sphère fixe F sous un angle constant sans lui être tangente [2] et, envisageant la métrique non euclidienne dans laquelle F est la quadrique fondamentale, soumettons la surface (M), considérée comme appartenant à l'espace euclidien, à la transformation de M. Darboux. A cette surface correspondra une surface (M′) dont la courbure moyenne non euclidienne sera constante (nulle si $\Sigma_1$ est orthogonale à F). Ce théorème a été énoncé par M. Servant [3] qui a en outre montré que la principale difficulté de la détermination des surfaces à courbure moyenne non euclidienne constante consiste dans l'intégration de l'équation

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \sin\theta,$$

dont dépendent les surfaces à courbure totale euclidienne constante. Ajoutons que, lorsque cette intégration aura été effectuée, il faudra encore, pour obtenir les surfaces (M′), intégrer deux équations de Riccati aux différentielles totales.

D'autre part, pour que la sphère $\Sigma_1$ coupe une sphère fixe sous un angle constant, sans lui être tangente, il faut et il suffit que les congruences $(d_1)$, $(d_{-1})$ appartiennent à deux complexes linéaires non spéciaux $L_1$, $L_{-1}$

(1) Reçue dans la séance du 9 octobre 1911.

(2) Si la sphère $\Sigma_1$ est tangente à une sphère fixe, la surface (M) est une surface de M. Thybaut et la droite $d_1$ s'appuie sur une droite fixe.

(3) *Comptes rendus*, t. 131, 1900, p. 827. — On peut l'établir comme il suit : A la sphère harmonique $\Sigma_1$ de la surface (M) correspond, dans la transformation de M. Darboux, la sphère harmonique de la surface (M′). Comme la première coupe la sphère fondamentale F sous un angle constant, la seconde a un rayon constant, ce qui démontre le théorème. En particulier, si la sphère $\Sigma_1$ coupe orthogonalement la sphère F, la sphère harmonique de la surface (M′) se réduit à un plan et la surface (M′) est minima.

conjugués par rapport au complexe L. Dès lors, *à toute solution de l'équation* (E) *correspond une infinité simple de réseaux conjugués dont les deux tangentes appartiennent à des complexes linéaires non spéciaux. On obtient ainsi tous les réseaux conjugués jouissant de cette propriété.*

Nous possédons ce résultat depuis longtemps. Nous l'avons établi par la méthode ci-dessus dans une lettre que nous avons eu l'honneur d'écrire à M. Darboux il y a quelques années. M. Wilczynski [1] y a été conduit récemment par une tout autre méthode.

2. Cherchons, parmi les réseaux qui viennent d'être envisagés, ceux qui se reproduisent après quatre transformations de Laplace. Pour ces derniers, les droites $d_2$, $d_{-2}$ coïncident; or elles sont conjuguées par rapport à L, donc la droite CD avec laquelle elles sont nécessairement confondues appartient à L. D'autre part, en général, les droites $d$, $d_2$ sont conjuguées par rapport au complexe $L_1$ et les droites $d$, $d_{-2}$ sont conjuguées par rapport au complexe $L_{-1}$. Comme dans le cas présent les droites $d_2$, $d_{-2}$ coïncident avec CD, les droites $d$ et CD sont conjuguées par rapport à $L_1$ [2]. Ces droites appartenant au complexe L, celui-ci est autoconjugué par rapport à $L_1$; par suite, les complexes L et $L_1$ sont en involution et la sphère $\Sigma_1$ est orthogonale à la sphère F. Réciproquement, si la sphère $\Sigma_1$ est orthogonale à une sphère fixe, les droites $d_2$, $d_{-2}$ coïncident. On peut, dès lors, énoncer le théorème suivant :

*Pour qu'un réseau conjugué dont les tangentes appartiennent à deux complexes linéaires se reproduise après quatre transformations de Laplace, il faut et il suffit que les complexes soient en involution. On déduit les réseaux jouissant de cette propriété des surfaces minima non euclidiennes par l'application successive des transformations de M. Darboux et de Lie* [3].

3. Désignons par $u$ et $v$ les paramètres des lignes de courbure d'une surface $\Omega$ et conservons toutes les notations de M. Darboux (*Leçons*, II$^e$ Partie, p. 386).

---

(1) *Sur la théorie générale des congruences* (*Mém. de l'Académie royale de Belgique :* Classe des Sciences, coll. in-4°, 2$^e$ série, t. III; 1911).

(2) Il est clair que les droites $d$ et CD sont aussi conjuguées par rapport au complexe $L_{-1}$. Par suite, les complexes $L_1$, $L_{-1}$, ayant en commun une double infinité de couples de droites conjuguées, coïncident.

(3) Ces réseaux s'obtiennent en faisant $\alpha = 0$ dans les formules de M. Wilczynski (*loc. cit.*, p. 73).

Les surfaces Ω sont caractérisées par l'égalité

$$(\alpha)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{1}{R'}}{\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{R'}}\frac{CU}{AV}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{1}{R}}{\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{R'}}\frac{AV}{CU}\right)=0,$$

dans laquelle U désigne une fonction de $u$ et V une fonction de $v$.

*Il suit de là que les surfaces de M. Guichard* [1] *sont* Ω. Pour celles de première espèce, on a en effet les relations suivantes que nous avons déduites des formules de M. Calapso :

$$\frac{\dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{1}{R'}}{\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{R'}}\frac{C}{A}=\frac{\partial}{\partial v}\operatorname{arg.th}\frac{A}{C},\qquad \frac{\dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{1}{R}}{\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{R'}}\frac{A}{C}=-\frac{\partial}{\partial u}\operatorname{arg.th}\frac{A}{C},$$

et ces relations entraînent une égalité de la forme (α).

On démontre de la même manière que les surfaces de M. Guichard de seconde espèce sont aussi Ω.

En effectuant dans l'égalité (α) les opérations indiquées, on est conduit au théorème suivant : *Si une surface est Ω de deux manières, elle l'est d'une infinité de manières.*

MÉCANIQUE ANALYTIQUE. — *Sur les liaisons non linéaires et les mouvements étudiés par M. Appell.* Note de M. **Étienne Delassus**, présentée par M. P. Appell.

1. Quand une liaison est réalisée au second ordre [voir mes précédentes Notes (*Comptes rendus*, 19 juin et 20 octobre 1911)], elle est réalisée pour tous les ordres ; nous dirons que la réalisation est parfaite. J'ai démontré qu'une liaison non linéaire n'admettait aucune réalisation linéaire parfaite. Soient

$$\theta_1=0,\qquad \ldots,$$

les équations du premier ordre d'une liaison linéaire ou non linéaire et considérons une réalisation obtenue en adjoignant aux équations θ des

[1] Guichard, *Comptes rendus*, t. 130, 1900, p. 159, et *Annales de l'École Normale supérieure*, 1903. — Voir aussi, dans les *Annali di Matematica*, année 1905, un Mémoire de M. Calapso, intitulé : *Alcune superficie di Guichard et le relative trasformazioni.*

équations

$$\pi_1(q, q', p, p', t, a) = 0, \quad \ldots,$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Les fonctions $\pi$ contiennent des constantes arbitraires $a$;

2° Les fonctions $\pi$ sont distinctes par rapport aux variables $p, p'$;

3° Les équations $\theta$ et $\pi$ forment un système distinct par rapport aux $q'$, $p'$, et ce système peut être mis sous forme linéaire;

4° Les équations $\pi_1, \ldots, \pi_\alpha$ sont distinctes par rapport aux $p'$, mais aucune des équations $\pi_{\alpha+1}, \ldots,$ ne forme avec elles un système distinct par rapport à ces variables;

5° Lorsque les $a$ tendent vers un certain système particulier $(a^0)$, les équations $\pi_1, \ldots, \pi_\alpha$ restent distinctes par rapport aux $p'$, mais les équations $\pi_{\alpha+1}, \ldots$ en deviennent des conséquences.

Quand les constantes $a$ ont un système de valeurs $(a)$ arbitrairement choisi, on a, en vertu de la seconde et de la troisième hypothèse, une réalisation linéaire $R_{(a)}$; si le système $(a)$ tend vers un système quelconque $(a')$, la réalisation $R_{(a)}$ tend vers une réalisation limite $R_{(a')}$.

Il n'en est plus de même si $(a)$ tend vers $(a^0)$ la première partie de la troisième hypothèse cesse d'être réalisée et $R_{(a)}$ *ne tend vers aucune réalisation limite*. Les équations complémentaires, qui font que la réalisation $R_{(a)}$ n'est pas parfaite, sont celles que l'on obtient en tirant les $p'$ des équations $\pi_1, \ldots, \pi_\alpha$ et les portant dans les équations $\pi_{\alpha+1}, \ldots,$ elles deviennent donc des identités, de sorte que les relations entre les $q'$, indépendantes des $p'$, se réduisent à la limite aux seules relations $\theta$ de la liaison proposée.

Nous avons donc *une réalisation linéaire* $R_{(a)}$ *qui ne tend vers aucune réalisation limite, mais dont les propriétés tendent vers des propriétés limites qui sont celles d'une réalisation parfaite*. Nous dirons que $R_{(a)}$ *est une réalisation à tendance parfaite quand* $(a)$ *tend vers* $(a^0)$.

On formera très facilement de telles réalisations en prenant, par exemple, des fonctions $\pi$ indépendantes des $p'$ et s'annulant identiquement pour $(a^0)$.

2. Les équations du premier ordre de la liaison $R_{(a)}$ peuvent s'écrire $\theta_1(q, q', t) = 0, \ldots, \varphi_1(q, q', p, t, a) = 0, \ldots, \psi_1(q, q', p, p', t, a) = 0, \ldots,$ qu'on peut mettre sous forme linéaire, mais que, pour former les équations du mouvement, nous pouvons conserver sous leur forme primitive.

On voit facilement que les équations du mouvement concret données dans une première Note peuvent, en introduisant des multiplicateurs,

s'écrire

$$\frac{\partial R}{\partial q''_1} = \sum \lambda \frac{\partial \theta}{\partial q'_1} + \sum \mu \frac{\partial \varphi}{\partial q'_1}, \qquad \ldots,$$
$$\frac{\partial R_1}{\partial p''_1} = \sum \nu \frac{\partial \psi}{\partial p'}, \qquad \ldots$$

Lorsque $(a)$ tend vers $(a^0)$ les fonctions $\varphi$, par hypothèse, deviennent identiquement nulles, donc les équations du mouvement concret tendent vers les équations limites

$$\frac{\partial R}{\partial q''_1} = \sum \lambda \frac{\partial \theta}{\partial q'_1}, \qquad \ldots,$$
$$\frac{\partial R_1}{\partial p''_1} = \sum \nu \frac{\partial \psi}{\partial p'_1}, \qquad \ldots,$$

auxquelles il faut adjoindre les équations de liaison. On remarque que les inconnues $p$ ne figurent pas dans le groupe

$$(1) \qquad \frac{\partial R}{\partial q''_1} = \sum \lambda \frac{\partial \theta}{\partial q'_1}, \qquad \ldots, \qquad \theta_1 = 0, \qquad \ldots,$$

que ces équations suffisent pour déterminer complètement tous les $q$ et les $\lambda$ dès qu'on donne les $q^0$ et $q'^0$ satisfaisant aux équations $\theta$, et enfin que ces équations sont indépendantes de la réalisation à tendance parfaite qui les a données. Ainsi :

*Tous les mouvements concrets, qui correspondent à un même système de forces et à un même système initial pour les $q$ et $q'$ et qui sont fournis par toutes les réalisations possibles à tendance parfaite, tendent vers un mouvement unique déterminé par les équations* (1) *et que nous appellerons le* mouvement parfait.

L'identité des équations (1) avec celles de M. Appell donne immédiatement :

*Les mouvements parfaits d'un système sont les mouvements de M. Appell et satisfont au principe du minimum de la fonction* R.

3. Le mouvement abstrait d'un système, soumis à une *liaison linéaire analytique* non réalisée, peut se définir, *analytiquement* comme mouvement satisfaisant au principe du minimum de R, ou *mécaniquement* soit comme mouvement fourni par les réalisations parfaites, soit comme mouvement parfait fourni par les réalisations à tendance parfaite.

Dans le cas d'une *liaison analytique non linéaire*, la première définition mécanique n'a plus de sens, mais la définition analytique et la seconde définition mécanique peuvent s'appliquer et la propriété du paragraphe précédent montre que ces deux définitions sont encore équivalentes.

Si l'on adopte la définition analytique, ce qui revient à poser le principe général de M. Appell, cette équivalence constitue, pour les mouvements abstraits, une propriété : celle d'être des mouvements parfaits.

Si l'on adopte la définition mécanique, cette équivalence constitue, pour les mouvements abstraits, la propriété de satisfaire au principe de M. Appell qui se trouve ainsi démontré rigoureusement dans le cas des liaisons non linéaires et devient un théorème général permettant d'écrire les équations du mouvement d'un système soumis à des liaisons quelconques du premier ordre.

PHYSIQUE. — *Méthode interférentielle pour la détermination des modules de torsion des cristaux.* Note de M. **Marcel Brillouin.**

1. La détermination complète des coefficients d'élasticité d'un cristal à propriétés réversibles ne peut pas, comme l'a montré M. Voigt, être obtenue uniquement par des mesures de flèches de flexion, dont la théorie et le montage sont relativement faciles. Pour atteindre les coefficients de glissement, il faut y adjoindre des mesures d'un autre genre, par exemple, les torsions des prismes; malheureusement ces expériences sont d'un montage beaucoup plus délicat que les expériences de flexion; aussi n'ont-elles été exécutées, pour une douzaine de cristaux, qu'au Laboratoire et avec les appareils de M. Voigt, par lui-même ou par quelques collaborateurs [1]. Hors de Göttingen il n'a été effectué que des mesures de flexion, et même le plus souvent incomplètes. Déjà très difficiles pour des cristaux assez gros pour fournir dans tous les sens, des lames *homogènes* de $1^{cm}$ à $2^{cm}$ de longueur, les expériences de torsion seront évidemment impraticables sur des lames de quelques millimètres, se prêtant encore aux expériences de flexion.

J'ai montré dans mes Leçons de cette année au Collège de France

---

[1] L'admirable ensemble de travaux de M. Voigt a été condensé par lui-même dans le *Lehrbuch der Krystallphysik*, Teubner 1910. Les Mémoires ont paru sous forme un peu abrégée dans les *Annalen der Physik*, et sous forme plus détaillée dans les *Göttinger Abhandlungen*, depuis 1880 environ.

(XXIX[e] Leçon, 1[er] avril 1911) que l'étude de *la déformation de la surface d'une lame fléchie* au moyen des franges d'interférence, permet de compléter la détermination des coefficients d'élasticité, à l'aide de la technique déjà presque complètement établie pour les substances isotropes par M. Cornu (*Comptes rendus*, 1869, et *Jubilé Lorentz*, 1900). Le montage correct en paraît possible même pour des lames de quelques millimètres, en observant avec un microscope métallographique à faible grossissement.

2. Considérons une lame de longueur $l$ (suivant $Oz$) d'épaisseur $2e$ (suivant $Ox$), et de largeur uniforme (suivant $Oy$), et désignons par

$$s'_{ij}\,(i, j = 1, \ldots, 6)$$

les *modules* d'élasticité (*Lehrbuch*, Ch. VII) ou *souplesses*, suivant les trois axes *rapportés à la lame étudiée;* un simple changement de coordonnées défini par l'orientation de la lame permettra de passer aux modules $s_{ij}$ rapportés à des axes fixes du cristal. Soumettons cette lame à un *couple pur* $\mathfrak{M}$, autour de l'axe des $y$, sans couples $\mathfrak{L}$, ni $\mathfrak{N}$ et sans forces. Soient $I_1$ le moment d'inertie de la section de la lame autour de l'axe des $y$, et $u$, $v$, $w$, les déplacements d'un point quelconque $x$, $y$, $z$ de la lame; il résulte de la théorie de M. Voigt que l'on a

$$u = -\frac{\mathfrak{M}}{2I_1}[s'_{13}\,x^2 - s'_{23}\,y^2 - s'_{43}\,yz + s'_{33}(l - z)\,z],$$

$$v = -\frac{\mathfrak{M}}{2I_1}[s'_{63}\,x^2 - 2\,s'_{23}\,xy + s'_{43}\,zx],$$

$$w = -\frac{\mathfrak{M}}{2I_1}[s'_{53}\,x^2 + s'_{43}\,xy - s'_{33}(l - 2z)\,x]$$

(*Lehrbuch*, p. 634).

L'expérience ordinaire de flexion fait connaître un seul coefficient $s'_{33}$, par le rapport de la flèche au couple $\mathfrak{M}$.

Supposons la lame à faces parfaitement parallèles et la face supérieure optiquement plane. Avant la déformation, plaçons au-dessus de la lame un plan optique, observons en lumière monochromatique les franges localisées entre ces deux surfaces et réglons-les parfaitement parallèles, de manière à obtenir une teinte plate. Fléchissons la lame, des franges apparaîtront, dessinant des lignes $u = \text{const.}$ ($x = -e$). La *forme* des franges fait donc connaître les rapports des deux coefficients $s'_{23}$, $s'_{43}$ au coefficient $s'_{33}$ connu par l'expérience de flexion ordinaire. Les franges sont généralement des hyperboles obliques et excentrées par rapport à la lame. Les cotangentes des

angles $\alpha$ des deux asymptotes avec la longueur de la lame sont

$$\cot\alpha = \frac{-s'_{43} \pm \sqrt{s'^2_{43} - 4 s'_{23} s'_{33}}}{2 s'_{33}}$$

et l'on a

$$\frac{s'_{43}}{s'_{33}} = -(\cot\alpha_1 + \cot\alpha_2), \qquad \frac{s'_{23}}{s'_{33}} = \cot\alpha_1 \cot\alpha_2.$$

Avec une flexion montrant trois ou quatre franges hyperboliques, le relevé d'un nombre suffisant de points sur les franges permettra de déterminer les asymptotes avec la précision nécessaire.

3. Les conditions qui rendent simples les formules du numéro précédent ne sont pas toutes nécessaires pour l'exactitude des mesures. En particulier, la perfection de forme plane de la lame cristalline n'est pas indispensable. La comparaison des franges avant et pendant l'action du couple ou sous l'action de deux couples différents, fera connaître la forme (pas trop irrégulière) de la surface de la lame, $x = -e + \xi(y, z)$, et la déformation subie; et la connaissance de la forme initiale ($\xi$) permettra de ramener les déformations observées à celles d'une lame plane, par des formules un peu compliquées, mais faciles à établir [1]; de même l'orientation des asymptotes n'est affectée que très peu, et avec correction possible, par une obliquité de la lame de verre. La seule condition optique indispensable, c'est la finesse des franges, et par conséquent un beau poli; il sera probablement possible d'accroître le pouvoir réflecteur par le dépôt d'un voile d'argent assez mince pour ne rien changer aux propriétés élastiques.

La condition mécanique indispensable est que la flexion soit produite uniquement par un couple $\mathfrak{M}$; il n'y a rien dans les dispositions à réaliser qui dépasse l'habileté d'un bon horloger.

4. Il est facile de s'assurer que les $s'_{43}$, $s'_{23}$ ainsi obtenus permettent le calcul complet des modules. Dans un cristal triclinique, à 21 modules, il y a 15 mesures de flexion indépendantes; si de chacune d'elles on tire non seulement le coefficient $s'_{33}$ correspondant mais aussi les deux autres $s'_{43}$, $s'_{23}$, on disposera donc de $45 - 21 = 24$ équations de contrôle entre les déterminations des 21 modules fondamentaux.

---

[1] C'est cette possibilité d'éliminer les imperfections de la surface qui constitue la supériorité de la méthode interférentielle sur la seconde méthode (des lignes focales) également étudiée par Cornu pour les substances isotropes.

PHYSIQUE. — *Sur la volatilisation des électrodes dans les tubes à néon.* Note de M. Georges Claude, présentée par M. d'Arsonval.

Dans une précédente Note j'ai montré que l'absorption du gaz luminescent qui se produit dans les tubes à néon était attribuable à la volatilisation, ou, suivant l'expression anglaise, à la désintégration des électrodes, et qu'en atténuant celle-ci par l'emploi d'électrodes de grande surface, on pouvait rendre l'absorption négligeable et obtenir des tubes de très grande durée.

Dans la même Note, j'ai indiqué de plus qu'à ma très grande surprise, les gaz obtenus par le traitement à l'acide nitrique de la pellicule de métal volatilisé contenaient, outre du néon, une très forte proportion d'hélium, et j'ai été amené à faire à ce sujet trois hypothèses: action sélective du métal volatilisé sur l'hélium contenu dans le néon en proportion trop faible pour être décelé au spectroscope; transformation du néon en hélium; troisième hypothèse enfin d'après laquelle la faible proportion apparente du néon proviendrait de la transformation partielle de celui-ci en composés du genre de l'ammoniaque pendant le traitement à l'acide nitrique. Je n'ai encore pu vérifier le bien-fondé de cette dernière hypothèse, mais il m'a semblé nécessaire de trancher de suite la question de transmutation.

A cet effet, j'ai fait établir un tube luminescent composé de 4 branches montées en croix sur une boule de verre centrale de $5^l$ environ, destinée à augmenter la quantité de gaz sur laquelle j'opérais. Chaque branche se terminait par une électrode de cuivre de petite surface, soit $30^{cm^2}$ environ, pour obtenir une volatilisation rapide. Le diamètre des tubes était de $30^{mm}$, la longueur entre électrodes des branches opposées était de $1^m$.

Le système, muni d'un récipient à charbon, a été « formé » par mon procédé ordinaire en purgeant tout d'abord à la pompe à vide les gaz dégagés par deux électrodes opposées employées tour à tour au passage du courant alternatif, puis en mettant la charge convenable de néon purifié, après quoi on a plongé le récipient à charbon dans l'air liquide.

A partir de ce moment, et la pression étant alors de l'ordre du millimètre de mercure, on s'est servi pour la « formation » uniquement d'une des paires d'électrodes opposées ; la formation terminée, on a continué à se servir uniquement de cette même paire jusqu'à ce que le dépôt formé sous l'effet d'un courant de l'ordre de 0,25 ampère ait atteint une épaisseur suffisante. A ce moment, on a interverti les rôles et fait passer le courant par l'autre paire d'électrodes jusqu'à obtenir aussi de ce côté un dépôt suffisant pour l'examen.

Il suffisait dès lors, pour résoudre la question, d'examiner les gaz fournis par les deux dépôts successifs : si l'hypothèse de l'action sélective était vraie, le deuxième dépôt devait être très pauvre en hélium par rapport au premier, tandis qu'il en devait contenir à peu près autant dans l'hypothèse de la transmutation.

Or le résultat a été aussi net que possible. Les $2^g$ du premier dépôt m'ont fourni de nouveau, à raison d'environ $1^{cm^3}$ par gramme, un résidu gazeux dans lequel j'ai retrouvé la proportion d'hélium tout à fait anormale déjà signalée. Au contraire, les $0^g,2$ du second dépôt m'ont fourni, en proportion à peu près identique, un résidu dans lequel le néon était très prédominant : malgré l'action absorbante sensiblement plus grande sur le néon de la petite quantité de charbon du récipient minuscule soudé au tube de Plücker, l'hélium était très peu visible au spectroscope dans le spectre éclatant du néon.

Il s'agit donc d'une action sélective, action d'une grande énergie puisqu'elle parvient à éliminer sous une forme très concentrée la totalité de l'hélium contenu dans le néon en trop faible proportion pour être visible au spectroscope.

Sir W. Ramsay a bien voulu m'informer que de son côté, avec l'aide du professeur Collie, il a également entrepris des expériences en vue de décider entre les hypothèses que j'avais indiquées. Ces savants sont arrivés aux mêmes conclusions par un procédé différent.

En employant du néon assez pur pour que les raies de l'hélium n'apparaissent pas, ils ont obtenu des dépôts contenant beaucoup d'hélium dans le cas des électrodes de cuivre et encore plus avec des électrodes en cadmium.

En employant du néon purifié avec un soin extrême par M. Watson en vue de la détermination du poids atomique de ce gaz, ils n'ont plus trouvé par le traitement à l'acide nitrique que du néon.

J'ajoute que Sir W. Ramsay m'a signalé que Travers a opéré une séparation de l'hélium et de l'argon par des moyens analogues à ceux décrits ci-dessus ([1]).

Je dois en terminant faire une remarque qui est peut-être instructive au sujet du mécanisme du passage du courant dans les tubes luminescents, et qui semble prouver que ce n'est pas dans une différence d'action chimique, peu explicable d'ailleurs pour ce qui paraît être plutôt une simple occlusion,

(1) *Proceedings of the Royal Society*, t. LX, p. 449.

qu'il faut chercher la cause de l'action sélective. Lorsqu'on observe un tube luminescent chargé à une pression voisine de $1^{mm}$ avec du néon contenant très peu d'hélium, on ne distingue les raies de l'hélium que très faiblement dans le tube proprement dit; au contraire, ces raies apparaissent d'une façon très intense, souvent même prédominante, dans l'intérieur des électrodes en même temps que les raies du cuivre. On les observe encore fort nettement dans cette région, alors que le mélange est assez pauvre en hélium pour que ses raies soient totalement absentes dans le reste du tube. Il semble donc que tant qu'il existe de l'hélium, le départ des charges se fasse de préférence par son intermédiaire; et il est dès lors naturel que l'occlusion porte surtout sur lui.

PHYSIQUE. — *L'harmonie des couleurs réalisée par l'emploi des camaïeux complémentaires.* Note de M. **A. Rosenstiehl**, présentée par M. A. Haller.

Quand l'œil a fixé une couleur, il devient momentanément aveugle pour elle et cela d'autant plus longtemps que cette première impression a été plus vive. Il n'est plus alors sensible que pour une couleur entièrement différente (couleur complémentaire). Ce phénomène, étudié soigneusement par les savants de la seconde moitié du XVIIIe siècle, a conduit à une règle relative à l'harmonie des couleurs que la pratique des artistes n'a pas sanctionnée.

La règle dit que l'harmonie a lieu quand les couleurs d'un coloris présentent dans leur ensemble les sensations colorées nécessaires pour reconstituer par leur mélange la sensation du blanc. Cette règle a été notamment formulée par Rumford, Field et Gœthe, et combattue par Brücke, Schreiber, von Bezold. Vers le milieu du XIXe siècle, Chevreul, à la suite de ses études classiques sur le *Contraste des couleurs*, a donné le conseil d'entourer la couleur qu'on veut mettre en valeur d'une zone teintée par sa complémentaire. C'est la première indication précise qu'on trouve dans la littérature, et mon expérience personnelle en a prouvé la parfaite justesse [1].

Mais l'association de deux couleurs franches complémentaires a toujours donné les plus mauvais résultats.

---

(1) *Bulletin de la Société industrielle de Mulhouse*, t. XLVIII, p. 189 et 194.

La cause de ces insuccès, les moyens d'y remédier et les résultats favorables obtenus finalement font l'objet de la présente Note.

I. Du temps de Chevreul les couleurs complémentaires étaient fort mal connues. Le jaune passait pour complémentaire du violet, tandis qu'il correspond au bleu, qu'on croyait complémentaire de l'orangé. Ce sont là des erreurs qui peuvent expliquer bien des divergences d'opinion, et il m'a paru nécessaire de juxtaposer des couleurs vraiment complémentaires telles qu'on les détermine à l'aide des disques tournants.

Ayant établi à l'aide de matières colorantes les plus vives créées par l'industrie, un cercle chromatique dont toutes les couleurs sont d'égale intensité de coloration (¹) on a disposé dans un plan trois couples de couleurs complémentaires choisies dans ce cercle à une distance de 120° l'un de l'autre. L'aspect de l'ensemble est loin d'être harmonieux. Le plus mauvais effet est obtenu par le couple rouge et le vert complémentaire. Les couples vert bleu et orangé, bleu et jaune sont un peu meilleurs, mais leur aspect reste singulièrement agaçant. Et pourtant ces couples réalisent avec exactitude les conditions de la règle de Rumford.

Il y a là un obstacle non prévu dont il s'agit de trouver la raison afin de pouvoir le vaincre.

Or cette raison se trouve à la fois dans les propriétés physiques de la lumière et dans la structure de l'œil.

Les lumières colorées, possédant une inégale réfrangibilité, ne forment pas leur foyer dans le même plan, mais dans des plans superposés. Il en résulte que pour voir nettement des surfaces colorées qui se touchent, l'œil est obligé de s'accommoder à la fois à deux distances; en réalité il s'accommode alternativement, tantôt à l'une, tantôt à l'autre couleur; mouvement automatique qui s'effectue à notre insu, mais n'en est pas moins une cause de fatigue, d'où le jugement défavorable sur ces arrangements que nous qualifions de *criards*.

Ce défaut peut être évité de trois manières : 1° ne pas juxtaposer deux couleurs complémentaires, mais les séparer par un espace neutre; 2° intercaler entre les deux couleurs complémentaires franches, des couleurs de réfrangibilité voisine, arrangement que nous trouvons dans le spectre et dans les cercles chromatiques; 3° addition de blanc tout au moins à l'une des deux couleurs franches. L'accommodation se fait alors au blanc, qui l'emporte toujours de beaucoup sur la sensation colorée.

---

(¹) *Comptes rendus*, t. 148, p. 312.

C'est ce dernier moyen qui va être envisagé dans ce qui suit.

Soit à colorier un dessin formé de fleurs et de feuillage de fantaisie, et l'on veut que le coloris forme par lui seul un tout complet, répondant à la règle de Rumford, Field et Gœthe.

On a pris le parti de partager ce coloris entre deux couleurs complémentaires dont l'une sera franche et appartiendra à l'objet principal (la fleur), et l'autre mêlée de blanc, coloriant les objets accessoires (le feuillage et le fond).

Dans le choix des couples de couleurs on observera les principes de la convenance.

Le degré d'intensité assigné à chacune des couleurs du couple dépendra des surfaces relatives occupées par elles.

Chacune de ces couleurs peut être représentée par plusieurs tons, dont la hauteur est abandonnée à l'appréciation de l'artiste qui devra s'inspirer du principe de la vision distincte.

Pour les obtenir on associera dans un disque un même secteur coloré, à des secteurs blancs d'autant plus grands que le ton voulu devra être plus clair.

Ce seront des camaïeux parfaits décrits dans un Mémoire précédent [1].

Tous ces tons possèdent même complémentaire et même intensité de coloration.

L'angle des secteurs colorés sera déterminé par le calcul basé sur deux données :

1° Les angles des secteurs colorés du couple, qui sont nécessaires pour produire la sensation du blanc.

2° Les surfaces relatives occupées par les deux couleurs dans le dessin.

On se rappelle que les *angles des secteurs de deux couleurs complémentaires, produisant la sensation du blanc, sont en raison inverse des intensités de ces deux couleurs.*

Soient A l'angle du secteur de l'une des couleurs franches; B, celui du secteur de la complémentaire; l'expérience donne $A + B = 360°$.

Soient $a$ la surface occupée dans le dessin par la couleur A, et $b$ celle occupée par la couleur B.

On a pris le parti d'employer la couleur A sans modification et de réduire l'intensité de la couleur B d'après la loi des surfaces.

---

[1] *Comptes rendus*, t. 151, p. 96.

L'angle cherché du secteur B sera

$$x = \frac{B}{A} 360 \frac{b}{a}.$$

Les coloris exécutés d'après cette méthode sont très harmonieux, et supérieurs à ceux exécutés selon la seule inspiration du peintre.

On peut conclure de ce résultat, au point de vue pratique, qu'il suffit de connaître une seule couleur d'un coloris pour que toutes les autres soient invariablement fixées.

Et au point de vue scientifique on conclura que la règle de Rumford, Field et Gœthe se trouve vérifiée, si l'on *tient compte de la nécessité d'éviter à l'œil la fatigue de l'accommodation*, condition réalisée par l'emploi des camaïeux complémentaires.

ÉLECTRICITÉ. — *Détermination de la force électromotrice en valeur absolue de l'élément* Weston *normal.* Note de MM. **P. Janet**, **F. Laporte** et **R. Jouaust**, présentée par M. E. Bouty.

Dans un précédent travail ([1]), nous avions trouvé pour la valeur de la force électromotrice de 20° de l'étalon Weston normal 1,01869 en fonction de l'ampère vrai et de l'ohm international.

Cette valeur, déterminée au moyen d'un électrodynamomètre type de lord Rayleigh construit au Laboratoire central d'Électricité, était supérieure de quelques dix-millièmes aux résultats d'autres expérimentateurs.

Des recherches postérieures nous firent voir que l'ohm international, tel que nous l'avions réalisé, différait de un dix-millième de celui des laboratoires étrangers et que de ce chef la valeur que nous avions obtenue devait être ramenée à 1,01859.

Dans le calcul de la constante de notre électrodynamomètre, nous avions considéré les bobines de l'appareil comme se limitant aux axes des spires terminales.

Tout récemment, le Dr Dorsey du Bureau of Standards de Washington a attiré notre attention sur ce point que la différence qui subsistait encore entre nos résultats et ceux d'autres expérimentateurs était due en grande partie à cette manière d'évaluer les dimensions des bobines utilisées.

---

([1]) *Bulletin de la Société internationale des Électriciens*, t. VIII, 1908, p. 459.

Dans ces conditions nous avons recommencé les calculs de l'appareil en considérant cette fois les bobines comme se limitant à la périphérie des spires extrêmes (y compris l'isolant du fil) et nous avons obtenu, pour valeur de la force électromotrice du Weston à 20°, 1,01836, valeur qui se rapproche beaucoup des valeurs obtenues d'autre part avec des appareils parfois très différents, 1,01831 (Pellat) [1], 1,01812 (Guillet), 1,01818 (National Physical Laboratory), 1,01823 (Bureau of Standards), 1,01825 (Haga et Boerhama).

## CHIMIE PHYSIQUE. — *Sur la théorie des solutions.* Note [2] de M. Albert Colson, transmise par M. Amagat.

Voici comment Van 't Hoff a exposé cette théorie dont les contradictions ont déjà été l'objet de vives controverses.

D'après les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, une molécule de sucre

$$(C^{12}H^{22}O^{11} = 342^g),$$

si elle se volatilisait normalement, occuperait, sous la pression P et à la température T, un volume V, tel que l'on ait : $PV = RT$, avec $R = 846$, V étant le volume moléculaire. En dissolvant ce poids $342^g$ dans un volume V de solvant à T, et en reliant ces quantités à la pression osmotique $\varpi$ par une expression de la forme

$$\varpi V = \rho T$$

dans laquelle $\rho$ est, comme R, rapporté à la molécule-gramme, Van 't Hoff a pu calculer $\rho$ au moyen des valeurs de $\varpi$ déterminées par Pfeffer. Le nombre trouvé coïncidant à peu près avec 846, Van 't Hoff a conclu que « la molécule d'un corps transformé en vapeur sous le volume V à T, ou dissous dans un volume V de solvant à T, exerce des pressions élastique et osmotique identiques ».

Cette conclusion semble ainsi se déduire naturellement de l'hypothèse d'Avogadro : mais le choix du sucre convient mal à la démonstration, attendu que ce corps est inconnu sous forme de vapeur et même sous forme liquide. D'autre part, les données de Pfeffer varient de 554 à 508; M. Fouard a même obtenu 470, de sorte qu'il n'est pas du tout certain que la valeur de $\rho$ soit identique à la constante des gaz parfaits $R = 846$. Bien

(1) Nous avons apporté aux chiffres de MM. Pellat et Guillet la correction de un dix-millième nécessitée par la différence existant entre les ohms que nous avons utilisés en 1908 et ceux des laboratoires étrangers.

(2) Présentée dans la séance du 9 octobre 1911.

plus, en substituant au sucre l'acide acétique qui lui est isotonique, l'identification de ces deux constantes devient impossible.

En effet, d'après Cahours, la vapeur d'acide acétique se rapproche de la forme bimoléculaire à mesure que la température s'abaisse. D'autre part, sa particule liquide est nettement bimoléculaire d'après Ramsay et Shields. Il est donc invraisemblable qu'à l'état dissous, intermédiaire entre les deux précédents, la particule acétique perde cette forme condensée dans un solvant chimiquement inactif, et sous des pressions parfois très fortes, par conséquent favorables à la polymérisation.

On peut arriver autrement à la même conclusion : Une particule gazeuse complexe, comme celle de l'acide acétique, ne se dissocie évidemment pas par compression à température constante. Dès lors la particule liquide de ce corps ne peut pas être plus simple que celle de la vapeur génératrice [1]. D'autre part, et je reviendrai ailleurs sur ce point, la presque identité des chaleurs de liquéfaction et de dissolution de l'acide acétique s'explique facilement en supposant que la molécule polymérisée dans la vapeur reste telle après la dissolution, tandis qu'il n'en est plus ainsi en admettant qu'elle se dépolymérise dans le solvant.

La constitution bimoléculaire de la particule acétique dissoute ainsi établie, est en opposition avec l'hypothèse d'Avogadro et avec l'invariabilité de la force vive attribuée à tout groupement particulaire (molécules, ions, etc.); car, dans le volume moléculaire V, le nombre des particules étant devenu la moitié du nombre N d'Avogadro, la pression osmotique devrait être $\frac{P}{2}$, c'est-à-dire la moitié de la pression P d'un gaz parfait. Or elle égale P ou est plus petite que P, suivant qu'on admet les nombres de Pfeffer ou ceux de Fouard, touchant le sucre.

Ajoutons encore que le cas de l'acide acétique (et de ses homologues) est d'autant moins favorable à l'assimilation des états gazeux et dissous, que l'interprétation des anomalies de Cahours par une condensation moléculaire gazeuse satisfait au contraire à ces lois fondamentales de la Chimie, comme il serait facile de le démontrer.

L'assimilation préconisée par Van 't Hoff, pas plus pour l'acide chlorhydrique dissous, que pour l'acide acétique, ne permet de mettre les faits expérimentaux en harmonie avec l'hypothèse d'Avogadro ; car d'après ses propriétés classiques, une molécule ($36^g,5$) de cet acide, loin de se dé-

(1) Ce raisonnement confirme d'ailleurs les résultats de Ramsay et Shields.

doubler en ions mobiles, se condense sous l'action de l'eau en particules de composition HCl, $2H^2O$. Celles-ci, au sein du solvant, devraient fournir une solution contenant autant de particules que le volume gazeux dont elles proviennent. Il en résulterait une pression osmotique $\varpi$ égale à la pression normale gazeuse correspondant à $R = 846$. Or ce n'est pas ce qui a lieu pour ce type d'électrolytes, et c'est pourquoi on a imaginé la décomposition des ions.

A la vérité on objecte que l'hypothèse des ions a l'avantage d'expliquer les faits relatifs à la conductibilité; mais cet argument est sujet à caution. Déjà, dans les justifications publiées par M. Arrhenius, il existe des écarts supérieurs à 15 pour 100 entre la théorie et les applications. Depuis, j'ai signalé les contradictions présentées par les sulfates chromiques en solution aqueuse; avant moi, M. Kahlenberg en avait indiqué d'autres. Notamment, il avait observé pour les solutions aqueuses de sel marin à 20 pour 100 une tension osmotique si forte, que l'hypothèse des ions, devenant à son tour insuffisante, il faudrait subdiviser les ions eux-mêmes pour expliquer cette anomalie.

Dans les autres solvants, non seulement l'état moléculaire des corps peut changer; mais, plus souvent encore que dans l'eau, la conductibilité des solutions n'a pas de rapport avec l'ionisation. Ainsi l'azotate d'argent, ionisé dans l'eau, ne l'est plus dans la pyridine ni dans le benzonitrile, et cependant ces solutions conduisent bien l'électricité (Werner). De même, les solutions des acides tartrique, succinique, salicylique dans la pyridine, celles des chlorures de lithium et de mercure, des iodures de sodium et de cadmium, etc., dans l'acétone, conservent un poids moléculaire normal, et, quoique n'étant par conséquent pas ionisés, conduisent pourtant l'électricité (Dutoit, Kahlenberg et Jones). L'ionisation, si elle existait dans les solutions, ne serait donc pas forcément en corrélation avec la conductibilité. Chimiquement, cette supposition, en désaccord avec mes expériences de 1907, est inutile si la particule acétique bimoléculaire équivaut cinétiquement à la molécule HCl.

*Conclusion.* — Outre qu'il est difficile d'admettre l'identité des mouvements cinétiques d'une molécule libre ou dissoute, l'examen des faits semble contraire à l'identification des pressions osmotique et gazeuse exprimée par la condition $R = \rho$, puisque l'hypothèse d'Avogadro et ses conséquences cinétiques ne sont pas satisfaites par les particules dissoutes, alors qu'elles le sont toujours par les molécules gazeuses condensées ou non.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Sur la tension d'expansibilité d'un fluide normal.* Note de **M. L. Gay**, présentée par M. A. Haller.

Dans une Note précédente (1), j'ai montré qu'à température constante T, la tension d'expansibilité $\pi$ d'un fluide pur est liée à la pression P qui s'exerce sur ce fluide, par la relation différentielle

$$\text{(I)} \qquad d\log\pi = \frac{V}{RT}dP,$$

V volume moléculaire du fluide. Soit

$$\text{(II)} \qquad (P+K)(V-b) = RT,$$

l'équation d'état du fluide normal; $b$ est un covolume constant.

Nous appellerons K *la pression interne statique* du fluide pour la distinguer de la *pression interne thermodynamique* K′ définie par la relation

$$\text{(III)} \qquad K' = El - P = T\frac{\partial P}{\partial T} - P = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$$

(U énergie moléculaire du fluide).

La relation (I) donne alors, après intégration,

$$\text{(IV)} \qquad \log\pi = \log\frac{RT}{V-b} + b - \frac{1}{RT}\int_0^P V\frac{\partial K}{\partial P}dP.$$

Pour les gaz suffisamment dilués, Leduc (2) a obtenu expérimentalement, à une grande approximation,

$$K' = \frac{2a}{V^2T},$$

$a$ étant une constante.

Or, des relations (II) et (III), on déduit

$$K' = K - T\left(\frac{\partial K}{\partial T}\right)_V;$$

d'où

$$K = \frac{a}{V^2T} \ (^3).$$

(1) *Comptes rendus*, t. 153, 1911, p. 262.

(2) *Comptes rendus*, t. 148, 1909, p. 1391; t. 153, 1911, p. 179.

(3) On obtient alors l'équation d'état de Clausius simplifiée; Kuenen a vérifié expérimentalement cette équation d'état (*Archives néerl. des Sciences exactes et natur.*, t. 26, 1893, p. 354).

De cette dernière relation on tire

$$V\frac{\partial K}{\partial P} = -\frac{2a}{V^2T}\frac{\partial V}{\partial P} = -K'\frac{\partial V}{\partial P} = -\left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T,$$

$$\int_0^P V\frac{\partial K}{\partial P}dP = \mathfrak{V} - U$$

($\mathfrak{V}$ énergie moléculaire du gaz parfait).

Dans le cas d'un gaz dilué, l'intégrale précédente exprime donc la différence d'énergie moléculaire entre le gaz parfait et le fluide.

Si nous étendons cette signification au cas du fluide non dilué, la relation (IV) devient

$$\log\pi = \log\frac{RT}{V-b} + \frac{b}{V-b} - \frac{\mathfrak{V}-U}{RT}$$

ou

$$\text{(V)} \qquad \log\pi = \log\frac{RT}{V-b} + \frac{b}{V-b} - \frac{E\mathfrak{L} - RT + PV}{RT}$$

($\mathfrak{L}$ chaleur latente moléculaire d'idéalisation du fluide).

*Application à* $C^6H^6$. — Je me suis servi des densités déterminées par Biron (1) et des tensions de vapeur déterminées par Young (2).

Ces tensions $p$ ont été ramenées aux tensions $p'$, correspondant à la benzine prise sous la pression atmosphérique P, d'après la formule

$$\Delta\log p = \frac{V}{RT}(P-p),$$

puis diminuées de

$$\frac{a}{v^2T} = \frac{ap^2}{R^2T^3} \quad (3).$$

[J'ai adopté pour $a$ la valeur $8{,}873.10^{12}$ (unités : le millimètre de Hg et le centimètre cube), calculée à l'aide de la valeur obtenue par Leduc, $K' = 53^{atm}, 47.10^{-3}$ pour la valeur de $C^6H^6$ sous la pression atmosphérique à 129°,6.]

$\mathfrak{L}$ a été calculé à l'aide des valeurs de $\pi$, ainsi obtenues d'après l'équation

$$\frac{\partial\log\pi}{\partial T} = \frac{E\mathfrak{L}}{RT^2}.$$

(1) *J. Soc. physico-chim. russe*, t. 42, n° 2, 1910, p. 135.

(2) *J. Chem. Soc.*, t. 55, 1889, p. 486.

(3) Voir ma Note déjà citée.

La formule

$$E\mathcal{L} = 262\,170\,000 - 383\,200\,t$$

($t$ température centigrade) paraît être satisfaisante.

En effet les valeurs de $\pi$, déduites des tensions de vapeur, coïncident au millième près avec celles calculées à l'aide de cette formule; toutefois, la différence des deux valeurs atteint le centième pour la température $0^\circ$.

On obtient le Tableau suivant :

| $t$. | $p$ (en mm Hg). | $r$ (en mm Hg). | V (en cent. cubes). | $b$ (en cent. cubes). | K (en atm.). |
|---|---|---|---|---|---|
| 0°... | 26,54 | 26,56 | 86,473 | 68,982 | 1,276 |
| 20.... | 74,66 | 74,40 | 88,567 | 69,050 | 1,227 |
| 40.... | 181,08 | 179,10 | 90,783 | 69,024 | 1,176 |
| 60.... | 388,58 | 379,69 | 93,146 | 68,882 | 1,122 |
| 80.... | 753,62 | 724,00 | 95,690 | 68,599 | 1,065 |
| 100.... | 1344,3 | 1261,4 | 98,458 | 68,148 | 1,006 |

C'est la vérification expérimentale des propositions théoriques précédentes.

Le covolume $b$ est en effet constant, surtout l'intervalle de température $0^\circ$ à $60^\circ$; sa valeur est $69^{\text{cm}^3},0 \pm 0^{\text{cm}^3},1$. Au delà de $60^\circ$, cette valeur baisse légèrement; cela est dû, très probablement, à une légère erreur dans la détermination de la pression interne statique de la vapeur : j'ai, en effet, supposé que, dans les conditions de l'expérience, on a, pour la vapeur de $C^6H^6$,

$$K' = \frac{2a}{V^2 T}$$

et

$$K = \frac{K'}{\blacksquare},$$

cela n'a lieu que pour une dilution suffisamment grande et une température suffisamment élevée.

*Conclusion.* — La vérification expérimentale de la formule (V) constitue une méthode simple et commode de caractérisation des liquides normaux et de détermination du covolume et de la pression interne de ces liquides.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur la volatilité des composés sulfurés.* Note de M. **Marcel Delépine**, présentée par M. A. Haller.

C'est une singularité sur laquelle on attire ordinairement l'attention que les mercaptans (thiols), le thiophénol et les thioacides (thioloïques) ont un point d'ébullition *inférieur* à celui des alcools, du phénol et des acides correspondants. Comme la Chimie des autres composés sulfurés est assez peu développée dans les cours élémentaires, on peut rester sous cette impression sommaire et croire, d'une façon générale, que les composés sulfurés bouillent plus bas que les composés oxygénés correspondants. L'exemple courant de l'hydrogène sulfuré gazeux à la température ordinaire, alors que l'eau est liquide, ne peut que renforcer cette opinion.

M. Louis Henry [1] a récemment rappelé quelques-unes de ces anomalies et en a reporté l'existence sur la complexité moléculaire de l'eau et des alcools comparée à l'état peu ou non associé des composés sulfurés correspondants, complexité mise en évidence par les déterminations de MM. Ramsay et Shields [2]; il a notamment fait ressortir que la méthylation d'un oxhydrile alcoolique, par exemple, provoque sous le rapport de la volatilité des effets inverses de ceux de la méthylation des mercaptans; l'éther-oxyde méthylique d'un alcool bout plus bas que cet alcool, alors qu'un sulfure méthylé bout plus haut que le mercaptan générateur.

Au cours de mes recherches sur les composés organiques sulfurés, j'ai naturellement envisagé ce problème et je puis, en m'appuyant sur un nombre considérable d'exemples tirés des travaux de mes devanciers et des miens, formuler la proposition suivante :

*La substitution du soufre à l'oxygène élève le point d'ébullition des composés, excepté quand elle a lieu dans l'oxhydrile de l'eau et des premiers termes des alcools, des phénols et des acides.*

Voici tout d'abord quelques chiffres qui établissent les exceptions :

---

(1) L. Henry, *Bull. Ac. royale de Belgique*, t. 9, 1907, p. 746; t. 10, 1908, p. 74.

(2) W. Ramsay et J. Shields, *J. chem. Society*, t. 63, 1893, p. 1089.

| | Ébullition. | | Ébullition. | Différence |
|---|---|---|---|---|
| Hydrogène sulfuré HSH............ | — 63° | Eau HOH.................... | 100° | 163° |
| Méthylmercaptan $CH^3SH$............ | + 6 | Alcool méthylique $CH^3OH$......... | 66 | 60 |
| Propène-thiol $CH^2:CHCH^2SH$....... | 90 | Alc. allylique $CH^2:CHCH^2OH$. | 97 | 7 |
| Éthane-dithiol $HSC^2H^4SH$......... | 146 | Glycol $HOC^2H^4OH$............ | 197 | 51 |
| Thiophénol $C^6H^5SH$................. | 172,5 | Phénol $C^6H^5OH$.............. | 181 | 9 |
| Acide thioacétique $CH^3COSH$....... | 93 | Acide acétique $CH^3COOH$..... | 119 | 26 |

On voit ici des représentants des fonctions oxhydrilées : eau, alcool saturé, alcool éthylénique, glycol, phénol et acide, posséder un point d'ébullition supérieur à celui des composés sulfhydrilés correspondants. Mais il faut bien se garder de généraliser cette constatation, car le point d'ébullition des composés sulfurés homologues croît, en général, plus vite que celui des composés oxygénés, de sorte qu'il y a un *point de croisement* au delà duquel c'est le composé sulfhydrilé qui bout le plus haut. Pour les alcools gras saturés, ce point de croisement est en $C^7$; on a, en effet, $C^7H^{15}.OH$, éb. 175°; $C^7H^{15}.SH$, éb. 174°-175°; pour les phénols, c'est au carvacrol ou à l'α-naphtol qu'il se produit.

Dans tous les cas où elle n'a pas lieu dans l'oxhydrile, la substitution élève le point d'ébullition. L'examen du Tableau suivant, où sont représentées les fonctions les plus variées, enlèvera tout doute à cet égard :

| Fonction, nom, formule et point d'ébullition du composé oxygéné. | Formule et point d'ébullition du composé sulfuré. | Différence des points d'ébullit. |
|---|---|---|
| **A. — *Éthers-oxydes.*** | | |
| Oxyde de méthyle $(CH^3)^2O$ (—24°) | $(CH^3)^2S$ (37°,5)............ | 61° |
| Anisol $C^6H^5O.CH^3$ (+156°) | $C^6H^5S.CH^3$ (187°)......... | 31° |
| Oxyde de phényle $(C^6H^5)^2O$ (252°) | $(C^6H^5)^2S$ (292°).......... | 40° |
| Glycol diméthylique $[CH^3O.CH^2-]^2$ (83°) | $[CH^3S.CH^2-]^2$ (183°).. | 2×50° |
| Formal diéthylique $CH^2(OC^2H^5)^2$ (88°) | $CH^2(SC^2H^5)^2$ (184°).... | 2×48° |
| Paraldéhyde $\left(CH^3CH\langle_{O-}\right)^3$ (124°) | $\left(CH^3CH\langle_{S-}\right)^3$ (247°).. | 3×41° |
| **B. — *Éthers-sels.*** | | |
| Acétate de méthyle $CH^3CO.OCH^3$ (58°) | $CH^3CS.OCH^3$ (88°)......... | 30° |
| » » » | $CH^3CO.SCH^3$ (95°)......... | 37° |
| » » » | $CH^3CS.SCH^3$ (142°)........ | 2×42° |
| Acétate de phényle $CH^3.CO.OC^6H^5$ (190°) | $CH^3CO.SC^6H^5$ (228°)... | 38° |
| Carbonate de méthyle $CO(OCH^3)^2$ (91°) | $CS(OCH^3)^2$ (119°)...... | 28° |
| » » » | $CO(SCH^3)(OCH^3)$ (120°) | 29° |
| » » » | $CS(SCH^3)(OCH^3)$ (167°). | 2×38° |
| » » » | $CO(SCH^3)^2$ (169°)...... | 2×39° |
| » » » | $CS(SCH^3)^2$ (225°)........ | 3×45° |
| Chloroformiate de méthyle $Cl.CO.OCH^3$ (71°) | $Cl.CS.OCH^3$ (108°)........ | 37° |

| Fonction, nom, formule et point d'ébullition du composé oxygéné. | Formule et point d'ébullition du composé sulfuré. | Différence des points d'ébullit. |
|---|---|---|
| | **C. — *Amides et imides.*** | |
| Diméthylacétamide $(CH^3)^2N.CO.CH^3$ (165°) | $(CH^3)^2N.CS.CH^3$ (238°). | 73° |
| Diméthyluréthane $(CH^3)^2N.CO.OCH^3$ (131°) | $(CH^3)^2N.CS.OCH^3$ (193°) | 62° |
| » » | $(CH^3)^2N.CO.SCH^3$ (180°) | 49° |
| » » | $(CH^3)^2N.CS.SCH^3$ (243°) | 2×56° |
| Tétraméthylurée $[(CH^3)^2N]^2CO$ (177°) | $[(CH^3)^2N]^2CS$ (245°)...... | 68° |
| Méthylcarbimide $CH^3N:CO$ (44°) | $CH^3N:CS$ (119°)......... | 75° |
| Éther imidothiocarb. $CH^3N:C\begin{smallmatrix}\diagup OCH^3\\ \diagdown SCH^3\end{smallmatrix}$ (143°) | $CH^3N:C(SCH^3)^2$ (192°). | 49° |
| | **D. — *Divers.*** | |
| Anhydride carbonique $CO^2$ (−79°) | $CS^2$ (47°)............... | 2×63° |
| Oxychlorure de carb. $COCl^2$ (+8°) | $CSCl^2$ (73°)............. | 65° |
| Anhydride acétique $(CH^3CO)^2O$ (137°) | $(CH^3CO)^2S$ (157°)........ | 20° |
| Furfurane $C^4H^4O$ (32°) | $C^4H^4S$ (84°)............. | 52° |
| αα-diméthyl-β-oxazol $C^5H^7NO$ (108°) | $C^5H^7NS$ (145°)........... | 37° |
| Oxychlorure de Ph. $POCl^3$ (110°) | $PSCl^3$ (124°,5).......... | 15° |

Il serait aisé de faire ressortir certaines régularités en considérant les homologues des divers composés dont je n'ai fait ici figurer qu'un exemplaire, ordinairement le plus simple. Par contre, la diversité des différences correspondant à une substitution est telle qu'elle ne permet guère pour l'instant d'autre conclusion que la proposition ci-dessus énoncée. On remarquera seulement que la différence est surtout accentuée pour les corps à bas point d'ébullition $(CH^3)^2O$, $CO^2$, $COCl^2$, $C^4H^4O$, ce qui n'a rien de surprenant, et pour les composés azotés, qu'ils bouillent haut ou bas, ce qui est plus inattendu. Enfin, on constate que plusieurs substitutions successives, comme dans $CH^3.CO.OCH^3$, $CO(OCH^3)^2$, $(CH^3)^2N.CO.OCH^3$, causent des élévations qui vont sensiblement en croissant.

La comparaison des deux Tableaux, pour les substances qui s'y prêtent, ne fait naturellement que confirmer les observations de M. Henry. Toutefois, la forme que j'ai donnée à la relation de volatilité entre les composés sulfurés et les composés oxygénés correspondants permet de ne faire figurer les exceptions qu'au second plan ; la substitution du soufre à l'oxygène diminue la volatilité dans les molécules comparables au point de vue de l'association ; réciproquement, les anomalies de cette volatilité corroborent la complexité moléculaire des composés oxhydrilés établie par MM. Ramsay et Shields.

ANTHROPOLOGIE. — *Sur un squelette humain de l'époque moustérienne trouvé en Charente.* Note de M. **Henri Martin**.

Nous avons découvert, le 18 septembre dernier, dans le département de la Charente, à la Quina, sur le Voultron (commune des Gardes) un squelette humain du type de Néanderthal.

Il reposait horizontalement, la tête en amont, à $4^{m},50$ du pied de la falaise, près de la partie inférieure de la couche du gisement que j'ai désignée sous le n° 3 (1), c'est-à-dire presque à la base du Moustérien inférieur.

Cette couche archéologique est un sable argileux verdâtre qui répond à un ancien lit vaseux du Voultron; elle est recouverte par les éboulements de la falaise qui autrefois s'avançait en corniche au-dessus de la rive.

Le squelette, enfoui dans le sable argileux à $0^{m},80$ de profondeur, n'était entouré d'aucune sépulture et ne paraissait pas avoir été inhumé; sa situation et sa position semblaient plutôt indiquer soit un cadavre jeté à la rivière du haut de la falaise et resté en place, soit un cadavre charrié par le courant, puis échoué.

Aucun bloc notable ne lui était superposé, le sable argileux qui l'environnait renfermait bien de petits fragments calcaires et, très disséminées, quelques-unes des pièces qu'on rencontre habituellement à ce niveau : racloirs, pointes à base plus ou moins épaisse, un très gros sphéroïde en calcaire et quelques os de ruminants et de cheval entaillés et utilisés, mais aucune des belles pièces qui caractérisent le Moustérien supérieur.

Cette assise étant parfaitement en place, n'ayant subi ni glissements ni remaniements, il est possible de dater l'époque où le corps y a été déposé et de la reporter à la base du Quaternaire moyen.

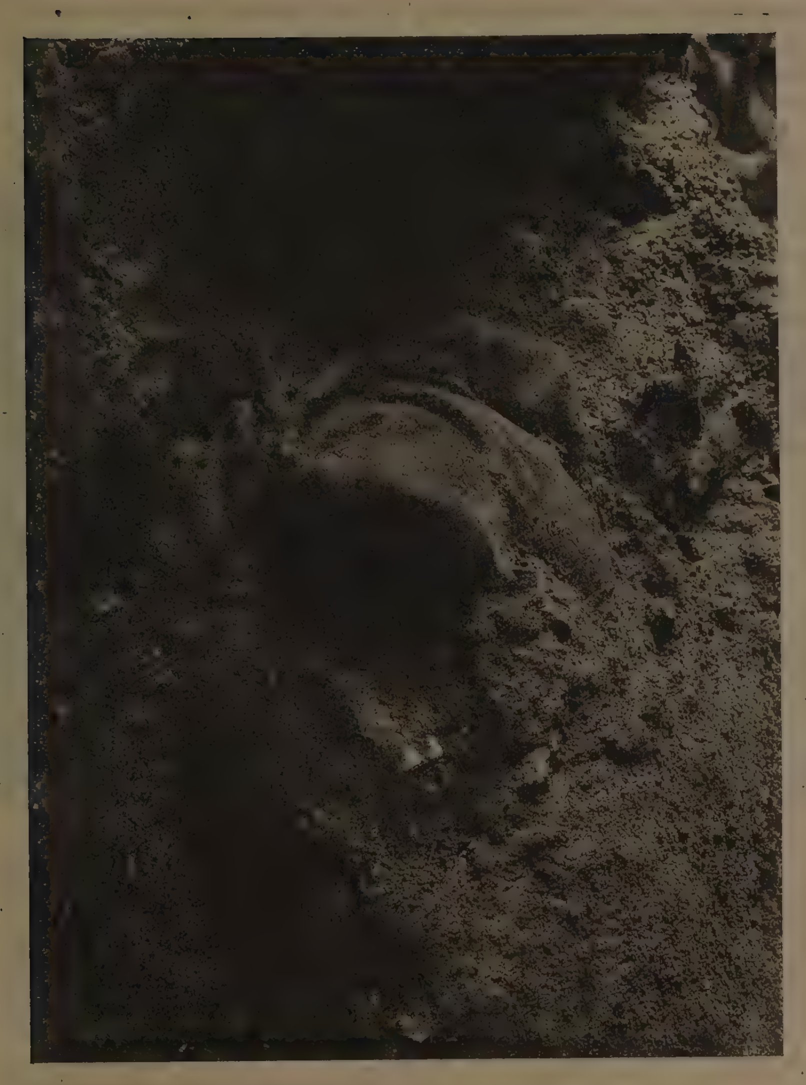
Les os ont subi, sans doute, une macération prolongée, dont l'effet a été une disjonction des pièces craniennes au niveau de leurs sutures, mais la reconstitution du crâne sera facile.

Tel qu'on en peut juger aujourd'hui, il offre à un haut degré les caractères anthropoïdes de la race de Néanderthal, plus même, semble-t-il, que les autres crânes quaternaires étudiés jusqu'ici. Ses arcades sourcilières s'avancent en une très épaisse visière, un peu relevée et limitée en arrière par un large sillon.

Ses dents sont très fortes, surtout les canines, qui atteignent un maximum

---

(1) Henri Martin, *Recherches sur l'évolution du Moustérien*, 2e fasc., p. 170, f. 5, cote A, et p. 181, f. 8, couche n° 3.



Le squelette de La Quina. Moustérien inférieur.
État du crâne pendant une des phases du dégagement.

exceptionnel chez l'homme actuel [1], au moins par leur épaisseur, car une usure très accentuée et à peu près uniforme pour toutes les dents, dont les cuspides n'existent plus, a réduit les couronnes à la moitié de leur hauteur normale.

Leurs racines présentent de nombreuses rugosités des saillies d'insertions ligamenteuses et des sillons transversaux indiquant de puissantes attaches alvéolaires; les racines des canines, au lieu d'être coniques, sont comprimées et marquées, de chaque côté, d'un profond sillon; leurs collets sont aussi très développés.

L'usure très forte et uniforme de ces dents dénote un long usage et, par conséquent, un sujet adulte, qui n'était cependant pas un vieillard, comme l'indiquent ses sutures craniennes non ossifiées.

Nous avons transporté dans notre laboratoire, près du gisement, le bloc de terre contenant ces restes humains, le dégagement du crâne est commencé, et nous entreprendrons ultérieurement celui des autres parties du squelette, quand les os, d'une extrême fragilité, auront pris une certaine consistance en séchant.

Le crâne et quelques fragments d'os longs ont seuls été ramenés à Paris; nous ne pouvons donc encore rien dire de la taille du sujet.

Quand il sera complètement reconstitué et que nous en aurons terminé l'étude, ce squelette quaternaire viendra enrichir les galeries du Muséum d'Histoire naturelle, car nous avons l'intention d'en faire don à cet établissement.

TÉRATOLOGIE. — *Sur un monstre humain bicéphale*. Note de MM. **R. Lacasse** et **A. Magnan**, présentée par M. Edmond Perrier.

Un accouchement au cours du huitième mois nous a permis d'observer la naissance d'un monstre à deux faces. Du sexe masculin, il pesait $2900^{g}$. Le corps avait la forme ordinaire d'un fœtus humain. Le fait caractéristique était la présence d'une seule masse céphalique formée de deux têtes soudées ensemble. Sur un cou large à l'arrière de $7^{cm},5$ reposait une tête globuleuse qui mesurait $13^{cm},5$ de hauteur, $16^{cm}$ de largeur vue de face, et $10^{cm}$ de largeur vue de profil. Cette tête était pourvue de cheveux abondants.

Au palper du cou, on sentait très distinctement comme deux colonnes

[1] De l'avis de M. Siffre et du nôtre.

vertébrales, mais il était impossible de se rendre compte de la disposition des deux têtes l'une par rapport à l'autre, têtes qui paraissaient étroitement unies. Les mentons étaient très voisins et les deux joues du côté de la soudure confluaient sans délimitation aucune.

Nous avons fait la radiographie de ce monstre. Elle montre avec netteté





une boîte cranienne unique. Les deux faces accolées sont bien dessinées. Les maxillaires inférieurs seuls sont indépendants. Le monstre offre une colonne vertébrale qui, unique dans sa partie inférieure, se bifurque à partir de la huitième vertèbre dorsale. Dans la région cervicale, les deux colonnes laissent entre elles un espace de $3^{mm}$ près de la ceinture scapulaire et de $1^{cm},5$ à la base du crâne.

La dissection ne nous a rien révélé de particulier pour les organes internes du tronc et du cou, les organes ne sont pas dédoublés. Le foie est volumineux, le cœur et les poumons sont normaux. Les artères et les veines ont leur répartition habituelle. L'œsophage est unique et les deux bouches s'ouvrent dans le même pharynx.

L'étude particulière des os permet de comprendre l'accolement des deux têtes.

On reconnaît de suite l'individualité de chacun des deux crânes, qui montrent deux frontaux, deux pariétaux avec des fontanelles antérieures et postérieures très nettes. Mais il n'y a qu'un occipital pour les deux têtes : c'est par cet os plus long et plus large que de coutume que s'est effectuée la soudure à l'arrière.

Sur les côtés externes et à leur partie inférieure, les crânes présentent des os normaux; ils sont soudés par les pariétaux qui s'engrènent intimement et qui leur forment une voûte unique tandis que leurs cavités encéphaliques communiquent librement par suite de l'absence des temporaux à l'endroit de la soudure. Il n'y a qu'un sphénoïde commun.

Chaque crâne possède en propre deux hémisphères cérébraux; ces cerveaux ne sont séparés l'un de l'autre que par des méninges très épaisses. Mais il n'existe qu'un seul cervelet placé dans une fosse cérébelleuse unique, au fond de laquelle s'ouvre le canal de la moelle épinière. On ne constate la présence que d'une seule moelle épinière alors qu'il paraît y avoir deux colonnes vertébrales dans la région supérieure du tronc.

Cette anomalie résulte de ce que la moelle continue son trajet normalement jusqu'à la région céphalique; ce n'est pas la colonne vertébrale qui se bifurque, mais bien chaque vertèbre qui se divise en deux parties qui s'écartent l'une de l'autre de façon à encadrer la moelle épinière au lieu de l'engainer.

Il y a donc lieu de considérer ce monstre bicéphale comme un fœtus normal dont les trois premiers cerveaux primitifs se seraient divisés longitudinalement en deux, tandis que les deux derniers restaient intacts. Cette supposition nous amène à conclure que la formation des os du crâne est sous la dépendance directe du développement du cerveau et en particulier des hémisphères cérébraux. La bifurcation de la colonne vertébrale serait due ici à un étirement des vertèbres dans le sens latéral alors qu'elles n'étaient pas encore ossifiées.

## ZOOLOGIE. — *Sur quelques larves de Poissons apodes.*

Note de M. **Louis Roule**, présentée par M. Edmond Perrier.

Les larves des Poissons apodes jouent, dans l'hydrobiologie marine, un rôle important. Leur existence pélagique, les difficultés de leur capture, malgré leur abondance, leurs migrations, leurs métamorphoses sont des plus caractéristiques. Mais si certaines, par exemple celles de l'Anguille et du Congre, commencent à être connues, il n'en est pas de même pour la plupart des autres, que les collections ne possèdent, du reste, qu'à l'état

d'exemplaires fort rares. Leur diversité, car on a pu cependant en décrire près d'une quarantaine de formes différentes, ajoute à l'intérêt qu'elles offrent. Aussi leur étude est-elle au nombre des principales questions présentes de l'Ichthyologie.

J'ai décrit dernièrement (*Bulletin de l'Institut océanographique*, n° 171, juin 1910) une de ces larves, recueillie au filet vertical, par le Prince de Monaco, en plein océan Atlantique. Je rapportais cette larve, d'après sa structure et sa possession d'un filament caudal, à ce type que les auteurs ont mentionné sous les deux noms d'*Oxystomus* (Rafinesque) et de *Tilurus* (Kölliker). Mais il devient impossible d'aller plus loin dans l'identification, les diagnoses données par les auteurs étant insuffisantes, et les caractères de mon exemplaire ne s'accordant pas toujours avec elles. La lecture de cette description a engagé M. J. Schmidt à me confier, pour l'étudier, la riche collection de *Tilurus* obtenue, ces dernières années, par le *Thor*, dans ses explorations océanographiques de l'Atlantique et de la Méditerranée. Cet examen, qui est aujourd'hui terminé, conduit à plusieurs conclusions.

1° On doit distinguer, suivant l'aspect du corps et la présence ou l'absence d'un filament caudal, deux types principaux parmi les larves des Poissons apodes : les *larves leptocéphaliennes* et les *larves tiluriennes*. Les premières ont un corps oblong, dont la longueur ne dépasse guère, en moyenne, douze à quinze fois la hauteur; elles manquent de filament caudal. Les secondes ont un corps rubané, dont la longueur dépasse, en moyenne, vingt fois la hauteur, et souvent davantage ; elles portent un filament caudal.

2° Les auteurs inclinent à considérer *Oxystomus* et *Tilurus* comme faisant double emploi. Ceci n'est pas. Les exemplaires du *Thor* sont bien des *Tilurus*, tels que Kölliker les a décrits succinctement. Par contre, il est encore impossible d'identifier *Oxystomus* de Rafinesque, que ses mandibules longues et pointues avec prédominance de l'inférieure, sa privation de nageoires, séparent nettement de *Tilurus*.

3° On peut reconnaître, parmi les larves tiluriennes, trois formes différentes. La première (*Tilurus*), la moins rare, est celle que Kölliker a le premier signalée comme provenant du détroit de Messine, et dont le *Thor* a recueilli une vingtaine d'individus dans l'Atlantique, au large des côtes d'Europe. Elle se caractérise par son filament caudal terminé en pointe, étroit et caduc ; par son anus très reculé ; par sa nageoire dorsale étendue sur le tronc entier, et commençant en arrière ou peu en arrière de la tête ; par ses mâchoires munies de fortes dents ; par ses yeux sphériques et nor-

maux. Cette forme se subdivise, à son tour, en plusieurs catégories, trois au moins. La deuxième, à laquelle je donne le nom de *Tiluropsis*, s'écarte de la précédente par ses yeux télescopiques, oblongs, à grand axe vertical. Les exemplaires, peu abondants, proviennent de l'Atlantique. La troisième, que je nomme *Tilurella*, est celle de la larve recueillie par le Prince de Monaco. Elle se caractérise par son filament caudal persistant, assez large, que termine une petite nageoire caudale; par son anus moins reculé; par sa nageoire dorsale limitée à la région post-anale; par ses mâchoires munies de dents très fines; les yeux sont sphériques, normaux.

4° Le filament caudal des larves tiluriennes est constitué par la région terminale et effilée de la zone post-anale du tronc. Celui de *Tilurella* est persistant. Celui de *Tilurus* et de *Tiluropsis*, destiné à tomber, doit manquer aux adultes issus de ces larves. Il n'offre, aux états les plus jeunes de son développement, aucune disposition particulière; il contient de bout en bout les extrémités postérieures de la notocorde, du neuraxe, et prolonge simplement le tronc. Plus tard, les corps vertébraux, en prenant naissance, ne se façonnent point dans la zone post-anale entière, mais seulement au voisinage de l'anus, et sur une étendue égale au quart environ de la zone. Les trois quarts postérieurs de cette dernière, ainsi laissés en dehors de l'évolution normale, augmentent peu, conservent leur structure première et constituent un grêle filament caduc. Avant la chute, et dans le plan de déhiscence, les pièces hypurales s'ébauchent pour servir de soutien à une nageoire caudale produite par une expansion de l'anale. Le filament venant à tomber, cette caudale de nouvelle formation occupe ainsi l'extrémité postérieure du corps. Ces faits méritent considération, car ils sont de la plus haute valeur, en morphologie comparée, au sujet de la nageoire caudale des Poissons.

5° La série des métamorphoses n'est connue que chez une minorité des Poissons apodes. Aussi est-il impossible de rapporter à leurs espèces la plupart des formes décrites, comme de distinguer entre celles qui appartiennent à des espèces différentes et celles qui dépendent du cycle embryonnaire d'une même espèce. J'ai déjà montré qu'on peut prendre *Tilurella* pour l'une des phases larvaires d'un Némichthyidé. Mais il est difficile d'affirmer quoi que ce soit sur *Tilurus* et *Tiluropsis*, bien que certaines dispositions paraissent les rattacher à des Murénidés ou à des Simenchélydés.

6° La conclusion dernière est qu'il ne faut plus considérer les larves des Poissons apodes comme appartenant toutes au cycle leptocéphalien. La diversité, parmi elles, paraît beaucoup plus grande. Le type tilurien, qui semblait secondaire jusqu'ici, et borné à la Méditerranée, offre une réelle

importance, autant par lui-même que par son extension géographique. Sans doute est-il particulier à certaines familles de ces Poissons, et ne se rencontre-t-il que chez elles; à l'exclusion d'autres familles, comme les Anguillidés et les Congéridés, qui ne passent que par des phases leptocéphaliennes.

ZOOLOGIE. — *Échinodermes antarctiques provenant de la Campagne du* Pourquoi-Pas? Note de M. R. **Koehler**, présentée par M. Edmond Perrier.

La collection d'Échinodermes recueillis par le D<sup>r</sup> Charcot au cours de la campagne du *Pourquoi-Pas?* est certainement la plus riche qui ait été rapportée des mers antarctiques. Le total des espèces d'Astéries, Ophiures et Échinides que renferme cette collection s'élève à cinquante-quatre, parmi lesquelles vingt-cinq sont nouvelles.

La plupart de ces formes ont été rencontrées au delà du cercle polaire antarctique, vers l'île Adélaïde et la Terre Alexandre I<sup>er</sup>. Le Mémoire descriptif, accompagné de seize planches doubles, dans lequel j'étudie ces Échinodermes, est actuellement terminé : je me contenterai d'attirer ici l'attention sur quelques-uns des faits généraux les plus saillants qui résultent de cette étude.

Astéries. — Les Astéries comprennent vingt-huit espèces dont quatorze sont nouvelles et quatre forment autant de genres nouveaux. A l'un de ces derniers appartient une superbe Étoile de mer dont le diamètre atteignait $44^{cm}$. Ce genre, auquel j'ai donné le nom de *Priamaster*, rentre dans les *Paxillosa* mais il est remarquable par la disposition quadrisériée des tubes ambulacraires; il constitue le type d'une famille nouvelle voisine des Archastéridées. Les autres genres nouveaux appartiennent respectivement aux Astériidées (*Autasterias*), Solastéridées (*Leucaster*) et Odontastéridée (*Pseudontaster*).

J'ai rencontré, dans les Astéries rapportées, une deuxième espèce de ce curieux genre *Cryaster* découvert par la première Expédition Charcot et qui paraît décidément très répandu dans l'Antarctique, puisque j'ai trouvé le *Cryaster antarcticus* dans les collections rapportées du Cap Royds (77°32′ S; 166°12′ E) par l'Expédition Schackleton; le nouveau *Cryaster* s'appellera *C. Charcoti*. Parmi les Astéries nouvelles, je dédie aux membres de l'Expé-

dition les *Lophaster Gaini*, *Crossaster Godfroyi*, *Remaster Gourdoni* et *Bathybiaster Liouvillei*.

Quant aux espèces déjà connues, plusieurs d'entre elles ont été retrouvées par le *Pourquoi-Pas?* bien loin des localités où elles étaient connues jusqu'à présent et leur aire de distribution géographique se trouve ainsi considérablement augmentée : ainsi les *Notasterias armata* Kœhler et *Coscinasterias Victoriæ* Kœhler du cap Royds, ont été retrouvées par l'Expédition Charcot, la première vers la Terre Alexandre Ier, la seconde par 60° S et 65° W, c'est-à-dire à plus de 120° en longitude du lieu où ces espèces ont été découvertes par l'Expédition Shackleton.

Ophiures. — Le nombre des espèces s'élève en tout à dix-sept, dont six sont nouvelles avec deux genres nouveaux. D'un de ces genres (*Ophioperla*) rappelle les *Ophioglypha*, mais la face dorsale est couverte de granules comme chez les *Ophioderma;* le deuxième (*Astrochlamys*) appartient aux Euryalidées : c'est une forme très curieuse en raison de ses affinités multiples. Parmi les espèces nouvelles, je citerai l'*Ophioglypha Roucki* et l'*Ophiosteira Senouqui :* cette dernière est la deuxième espèce d'un genre tout à fait spécial aux mers antarctiques et dont le type a été découvert par la *Southern-Cross* au cap Adare; *Amphiura Joubini* nov. sp. est remarquable par la taille de son disque.

Quant aux formes connues, plusieurs d'entre elles se rapportent à des espèces que j'ai décrites autrefois d'après les collections de la *Belgica*. D'autres sont très intéressantes au point de vue de la géographie zoologique. Ainsi l'*Ophiacantha vivipara*, connue surtout dans les régions magellanes, a été capturée par le *Pourquoi-Pas?* en diverses localités jusqu'au 68° 34′ S. L'*Ophiodiplax disjuncta*, que j'ai décrite tout récemment d'après des exemplaires rencontrés au cap Royds par l'Expédition Shackleton, a été retrouvée par le Dr Charcot vers 60° S et 70° W. L'*Ophionotus Victoriæ* a été recueillie en exemplaires extrêmement nombreux, mais ceux-ci sont particulièrement remarquables par leur grande taille et dans quelques-uns le diamètre du disque atteint 44mm.

Échinides. — Ils renferment neuf espèces dont cinq nouvelles avec un genre nouveau : ce dernier, auquel j'ai donné le nom de *Parapneustes*, est représenté par deux espèces différentes. Les autres formes nouvelles comprennent un *Amphipneustes*, genre essentiellement antarctique et deux Cidaridés. Dans l'un de ceux-ci, l'*Eurocidaris Perrieri*, j'ai retrouvé un

très curieux parasite, l'*Echinophyces mirabilis*, découvert par Mortensen dans deux autres Oursins antarctiques et rapporté par ce savant aux Myxomycètes. Ce parasite se développe dans le tissu calcaire des grands piquants et il provoque chez son hôte des modifications étonnantes portant non seulement sur les caractères extérieurs de ces piquants, mais sur la forme et la pigmentation des pédicellaires ainsi que sur la situation des orifices génitaux; le facies des individus parasités est tellement différent de celui des exemplaires normaux qu'on serait tenté de les placer dans deux genres distincts.

Parmi les Échinides déjà connus, je mentionnerai seulement le *Parabatus Shackletoni* Kœhler : c'est encore une espèce découverte au cap Royds et retrouvé par le *Pourquoi-Pas?* à une très grande distance de cette dernière localité.

Tous ces faits sont extrêmement intéressants mais je ne puis que les effleurer ici.

La collection des Astéries, Ophiures et Échinides recueillie par le *Pourquoi-Pas?* constitue un ensemble ayant un caractère tout à fait spécial et sans analogie avec aucune faune provenant d'autres régions du globe. Son étude confirme ce que j'ai déjà eu l'occasion d'écrire à différentes reprises, au sujet de l'extraordinaire variété des formes animales dans les mers antarctiques et de l'absence de formes bipolaires. Je reviendrai sur ces différents points dans mon Mémoire définitif.

J'ajouterai encore un renseignement qui a son intérêt puisque les collections du Dr Charcot sont destinées au Jardin des Plantes : les Échinodermes qui m'ont été remis sont dans un état de conservation parfait; ils ont été admirablement préparés et l'on ne peut que féliciter M. Gain des soins qu'il a donnés à cette belle collection.

GÉOLOGIE. — *Essai d'une Carte géologique de l'Afrique occidentale.* Note de M. **Henry Hubert**, présentée par M. le Prince Roland Bonaparte.

A l'issue de la publication des résultats de la mission scientifique dont M. le Gouverneur Liotard avait bien voulu me charger au Dahomey, M. le Gouverneur général Ponty me faisait l'honneur de me confier en 1908 une nouvelle mission ayant pour objet l'étude des formations géologiques et des ressources minérales des régions soudanaises, en particulier celles de

la Boucle du Niger. Le choix de ces régions était surtout guidé par l'intérêt qu'il y avait alors à relier entre eux, par des itinéraires géologiques, les territoires de l'Ouest africain déjà visités (Sénégal, Guinée, basse Côte d'Ivoire, Dahomey, Sahara), de façon à obtenir, dans le plus court délai possible, une première esquisse d'ensemble. Aussi, mes recherches sur le terrain terminées, me suis-je aussitôt efforcé de faire ressortir l'état actuel de nos connaissances sur la géologie de l'Afrique occidentale, en établissant une Carte au $\frac{1}{5\,000\,000}$ dont j'ai l'honneur de présenter aujourd'hui une première épreuve à l'Académie des Sciences.

Il est évident qu'en raison de la surface considérable des territoires représentés, s'étendant, sur 33 degrés de longitude, de Dakar aux confins de l'Afrique équatoriale française et, sur 21 degrés de latitude, du Cameroun au Rio de Oro, il ne m'était possible d'établir un travail d'ensemble qu'en ajoutant à mes observations celles des explorateurs français et étrangers ayant étudié les pays voisins de ceux que j'ai visités. Cette Carte résume donc les éléments suivants :

1° Les cartes géologiques générales établies antérieurement par : Stromer von Reichenbach (Cameroun $\frac{1}{4\,000\,000}$), Gautier (Sahara $\frac{1}{1\,250\,000}$), Chudeau (Sahara $\frac{1}{1\,250\,000}$, deux feuilles), Hubert (Dahomey $\frac{1}{1\,250\,000}$), Lemoine (Sénégal env. $\frac{1}{6\,200\,000}$), de Lamothe (Haut-Sénégal et Niger $\frac{1}{8\,000\,000}$), Falconer (Nigéria septentrionale $\frac{1}{2\,000\,000}$), Hubert (Haut-Sénégal et Niger, Guinée française, Côte d'Ivoire $\frac{1}{1\,000\,000}$, deux feuilles) ;

2° Les travaux relatifs à la géologie des territoires français et étrangers de l'Afrique occidentale. En raison de l'abondance de ces travaux, pour lesquels mon interprétation a été réduite au minimum, il est matériellement impossible d'en donner ici la bibliographie; celle-ci sera d'ailleurs publiée d'autre part;

3° La détermination et l'étude des échantillons provenant de l'Afrique occidentale et ayant été réunis au Muséum national d'Histoire naturelle (laboratoires de Minéralogie et de Géologie).

Je décrirai brièvement les formations géologiques représentées :

*Pléistocène et actuel.* — Formations donnant lieu parfois à des accumulations puissantes; elles sont marines (Mauritanie à Guinée, Togo à Cameroun), fluviatiles (Niger, Bani), lacustres (Tchad), ou continentales (Dahomey, Sahara, Tchad). Celles du Rio de Oro, de la Mauritanie et du Tchad sont seules datées (pléistocènes).

*Miocène.* — Localisé sur le littoral du Rio de Oro.

*Éocène.* — Occupe la majeure partie de la colonie du Sénégal. Des dépôts

calcaires, continus en profondeur depuis le Cameroun jusqu'au Togo (d'où ils se relient sans doute à ceux de la Côte d'Ivoire), sont sans doute aussi éocènes, bien qu'insuffisamment datés. Des formations éocènes seraient encore largement représentées dans la Nigeria septentrionale; mais, faute d'éléments permettant d'en tracer les limites pour les territoires français, j'ai ramené provisoirement ces formations au Crétacé, suivant les vues antérieures des auteurs français.

*Crétacé.* — Reconnu à Dakar, dans la Nigeria méridionale et au Cameroun, le Crétacé est surtout développé dans les régions désertiques entre le Niger et le lac Tchad, au delà duquel il se relie sans doute au Crétacé du Désert Libyque. C'est toujours du Turonien ou du Maëstrichtien (Sénonien exceptionnellement), sauf la partie comprise entre Agadès et Zinder, rapporté provisoirement au Crétacé inférieur.

A côté de ces formations secondaires, j'ai placé provisoirement, mais sans les identifier, celles de Koro et d'Oti, également postérieures aux grès siliceux horizontaux. Il faudra peut-être y rapporter aussi les dépôts du Niger, en amont de Tombouctou.

*Carbonifère.* — Localisé dans la région de Taodenni.

*Grès siliceux horizontaux.* — Ils se traduisent dans le modelé par des plateaux isolés par l'érosion. Depuis Hombori (Boucle du Niger) jusqu'à Atar (Mauritanie), ils forment même un immense plateau originellement continu, limité extérieurement par une falaise abrupte et entamé seulement par les vallées de la Volta, du Niger-Bani et du Sénégal. Ils sont dévoniens en Mauritanie et au Sahara; leur âge est douteux ou inconnu ailleurs. Partout ils présentent entre eux de grandes analogies d'aspect.

*Roches sédimentaires métamorphisées.* — En ce qui concerne les formations antérieures aux grès siliceux, au sujet desquelles les opinions demeurent divergentes, il m'a paru indispensable de faire une coupure entre les schistes cristallins proprement dits et les roches sédimentaires métamorphisées. Cette distinction, purement pétrographique, peut, par cela même, être quelquefois artificielle. Mais elle a l'avantage de ne rien préjuger quant à l'âge absolu des formations, et de correspondre dans l'ensemble, pour les pays que j'ai visités, à des différences au point de vue de la genèse et de l'âge.

Là où je les ai observées, les roches sédimentaires métamorphisées sont

toujours postérieures aux schistes cristallins. Elles couvrent de vastes espaces et sont surtout représentées par des schistes micacés (régions soudanaises) ou des quartzites (Dahomey, Togo). Leur âge absolu, certainement variable suivant les régions, a été à plusieurs reprises rapporté provisoirement au Silurien.

*Schistes cristallins.* — Largement représentés en Afrique occidentale. Au sud du 14e parallèle et à l'ouest de la Nigeria, les orthogneiss dominent.

*Roches éruptives anciennes.* — *a. Série granite-syénite.* — Les granites sont très abondants au milieu des schistes cristallins où ils se présentent sous forme de filons ou de petits massifs. Les autres types de cette série sont rares.

*b. Série diorite-gabbro-péridotite.* — A l'encontre de la série précédente, celle-ci est plus spécialement localisée au Soudan au milieu des roches sédimentaires métamorphisées, dont elle accentue ainsi la différenciation. Les types microlitiques de cette série ont été fréquemment observés.

*Roches volcaniques récentes.* — Les plus anciennes datent du Crétacé supérieur au Sénégal, alors que les plus récentes sont actuelles au Cameroun. On les a rencontrées encore dans la Gold-Coast, la Côte-d'Ivoire (?), la Nigeria, Fernando-Po et le Sahara.

*Tectonique.* — Les directions tectoniques générales ont été également indiquées.

La partie géographique de cette Carte a pu être établie avec toute la rigueur désirable, grâce à la fois aux travaux géologiques signalés plus haut, aux documents géographiques du Ministère des Colonies et aux levers topographiques que MM. les Gouverneurs généraux Ponty et Liotard, MM. les Gouverneurs Clozel et Angoulvent ont bien voulu faire mettre à ma disposition, et qui sont l'œuvre de fonctionnaires et d'officiers.

PHYSIQUE DU GLOBE. — *Dosage spectrophotométrique du xénon. Constance des rapports xénon-argon et xénon-krypton dans les mélanges gazeux naturels.* Note de MM. **Ch. Moureu** et **A. Lepape**, présentée par M. H. Deslandres.

I. Nous avons fait connaître dernièrement une méthode spectrophotométrique de dosage du krypton, qui nous a permis de déterminer les pro-

portions de ce gaz, toujours minimes, contenues dans divers mélanges gazeux naturels (*Comptes rendus*, 13 mars 1911 et 27 mars 1911). Il nous a été possible d'étendre le même procédé à la détermination du xénon.

Nous mettons à profit, à cet effet, l'augmentation d'intensité que subit la raie bleu-indigo 4671,42 du xénon, la plus intense du spectre visible, lorsque la proportion de xénon croît dans un mélange d'argon et de xénon, et nous comparons les intensités à celles qu'on observe avec des mélanges d'argon et de xénon de composition connue [1].

Pour diminuer l'erreur inhérente à l'appréciation d'intensité de la ligne du xénon, nous réalisons le plus possible, par des dilutions convenables dans de l'argon pur (exempt de xénon) et en profitant des indications d'une ou deux expériences préliminaires, une concentration en xénon équivalente à la concentration en argon brut de l'air qui donne l'égalité d'intensité des lignes du xénon 4671,42 et de l'argon 4702,5 *dans le même spectre*. Une erreur relative non négligeable, de ce fait, n'en persiste pas moins; et elle est certainement plus grande que celle qu'on commet dans le cas du krypton. Cela tient à ce que la raie du xénon étudiée présente des variations d'intensité moins régulières que celles du krypton, et aussi à ce qu'elle est située dans une région du spectre où l'œil possède une sensibilité très inférieure à celle dont il jouit dans le jaune, qui comprend la raie du krypton utilisée. Aussi, pour réduire les erreurs au minimum, faisons-nous le plus souvent plusieurs expériences pour chaque mélange : leur concordance étant satisfaisante, nous en prenons ensuite les moyennes. Pour étalonner notre appareil, nous n'avons pas effectué moins de 40 expériences sur l'argon brut de l'air.

La quantité minima de xénon que nous pouvons ainsi doser dans $4^{cm^3}$ du mélange argon-xénon est voisine du demi-millième de millimètre cube, soit, en poids, trois millionièmes de milligramme; ce qui, pour la concentration en xénon, correspond, en volumes, à $1,2.10^{-7}$, et, en poids, à $4.10^{-7}$.

Il est à remarquer que, si cette méthode de dosage du xénon est moins exacte que celle que nous avons instituée pour le krypton, la comparaison des chiffres prouverait, par contre, qu'en définitive elle se trouve être un peu plus sensible.

II. Nous avons appliqué le procédé au dosage du xénon dans 17 gaz spontanés de sources thermales et 1 gaz volcanique (lequel a été obligeam-

---

(1) L'argon *brut* de l'air (hélium, argon, néon, krypton, xénon), d'après les déterminations de Sir William Ramsay, effectuées par distillation fractionnée, renferme, en volumes, $6,3 \times 10^{-7}$ de xénon. C'est ce mélange titré qui, comme dans le cas du krypton, nous a servi pour l'étalonnage de notre appareil.

ment mis à notre disposition par M. Armand Gautier). On trouve ainsi que les teneurs de ces mélanges en xénon, toujours extrêmement faibles, peuvent être très différentes suivant la provenance. Si, au contraire, on considère les rapports xénon-argon et xénon-krypton, on constate que chacun d'eux oscille, dans des limites assez étroites, autour d'une valeur moyenne, laquelle est d'ailleurs voisine de celle qu'il possède dans l'air. Nous rassemblons, dans le Tableau suivant, les valeurs des rapports xénon-argon et xénon-krypton [1] dans les mélanges étudiés, en rendant égale à l'unité la valeur de chacun de ces rapports pour l'air :

| Provenance du mélange gazeux. | $\frac{\frac{Xe}{Ar}\text{ (sources)}}{\frac{Xe}{Ar}\text{ (air)}}$. | $\frac{\frac{Xe}{Kr}\text{ (sources)}}{\frac{Xe}{Kr}\text{ (air)}}$. |
|---|---|---|
| Aix-les-Bains (Soufre) | 1,6 | 1,3 |
| Bagnères-de-Bigorre (Salies) | 1,6 | 1,3 |
| Bagnères-de-Luchon (Bordeu, n° 1) | 1,6 | 1,3 |
| » » (Ferras, enceinte) | 1,2 | 1,1 |
| » » (Saule, n° 2) | 1,9 | 1,6 |
| Bourbon-l'Archambault | 1,6 | 1,1 |
| Cauterets (La Raillère) | 1,2 | 0,9 |
| La Bourboule (Choussy) | 2,2 | 1,2 |
| Longwy (Récollets) | 1,9 | 1,6 |
| Luxeuil (Grand-Bain) | 1,6 | 1,1 |
| Nancy (Parc Sainte-Marie) | 1,9 | 1,3 |
| Plombières (Vauquelin) | 1,9 | 1,3 |
| » (n° 3) | 1,6 | 1,3 |
| Saint-Honoré | 1,2 | 0,9 |
| Uriage | 1,9 | 1,6 |
| Vichy (Chomel) | 1,9 | 1,3 |
| » (Grande-Grille) | 2,5 | 1,6 |
| Gaz du Vésuve | 1,2 | 1,1 |
| Air | 1 | 1 |

Malgré que le champ de variation soit assez étendu, l'impression de constance ne se dégage pas moins nettement de l'examen d'ensemble de ces chiffres.

Si, maintenant, on considère ces nombres de plus près, on remarque d'abord que la valeur moyenne (1,6) des rapports xénon-argon est sensi-

(1) Les valeurs des rapports xénon-krypton ont été obtenues en divisant celles des rapports xénon-argon par les valeurs des rapports krypton-argon, que nous avons déterminées précédemment (*Comptes rendus*, 27 mars 1911).

blement supérieure à celle (égale à 1) de ce même rapport pour l'air. En second lieu, si l'on rapproche de ces chiffres les valeurs des rapports krypton-argon (*loc. cit.*), on observe que la valeur moyenne (1,6) du rapport xénon-argon surpasse sensiblement la valeur moyenne (1,2) du rapport krypton-argon dans les mélanges gazeux naturels, y compris l'air (où, rappelons-le, le rapport est, dans tout ce qui précède, et par convention, pris pour unité.

Ces nouveaux résultats s'accordent parfaitement avec l'hypothèse générale que nous avons formulée dernièrement pour expliquer la constance des rapports krypton-argon, laquelle, remontant jusqu'à la nébuleuse génératrice du système solaire, repose sur l'inertie chimique et l'état gazeux des deux éléments : comme ses congénères l'argon et le krypton, en effet, le xénon est aussi un gaz chimiquement inerte.

On voit, en définitive, que le mélange des trois gaz : argon, krypton, xénon, se comporte dans la nature, eu égard à la fixité des rapports, à peu près comme s'il constituait un composé défini.

SISMOLOGIE. — *Sur l'application de la suspension à la Cardan aux sismographes.* Note de M. **de Montessus de Ballore**, présentée par M. Ch. Barrois.

La suspension à la Cardan pure et simple n'a jamais été appliquée, que je sache du moins, à la construction des pendules sismographiques, car si le pendule astatique justement réputé de Wiechert repose bien sur des couples de ressorts placés en croix, il s'agit d'un pendule inverti et l'équilibre de la masse stationnaire n'est obtenu que grâce aux tiges des composantes horizontales. On sait, d'autre part, le grand avantage qu'il y aurait à pouvoir disposer à volonté et de façon simple de la période pendulaire propre et précisément la suspension ordinaire à la Cardan résout complètement le problème, car il suffira pour cela que les couteaux, ou mieux les pointes de la masse soient mobiles, et l'on pourra dès lors placer le centre de gravité à la hauteur correspondant à la période d'oscillation adoptée à l'avance. Un sismographe ne répond bien, en effet, qu'à tel ou tel ordre de grandeur des périodes du mouvement sismique et, par conséquent, cette facilité de faire varier la période pendulaire permettra d'adapter, au moins expérimentalement, l'appareil aux secousses locales, régionales, rapprochées ou non, et même aux téléséismes, suivant le genre de recherches qu'on se

propose dans chaque observatoire. On pourra aussi aller jusqu'à l'apériodicité presque complète sans le secours d'un accessoire amortisseur.

Un pendule construit récemment à Santiago d'après ces principes sert maintenant à y enregistrer les secousses du Chili jusqu'aux distances de $1000^{km}$ à $2000^{km}$ avec une masse de $65^{kg}$ seulement, tandis que, dans le même observatoire, un pendule Wiechert de $200^{kg}$ reste muet pour ces distances. Il paraît bien probable que si l'on avait pu disposer dans ce pays d'ateliers de mécanique de précision, il aurait été possible, tout en diminuant le poids de la masse stationnaire, d'augmenter la sensibilité de l'appareil jusqu'aux plus grandes distances; en un mot, le principe de la suspension à la Cardan semble applicable à la construction des télésismographes.

MM. **Frédéric de Mare** et **Charles Jacobs** adressent un Mémoire intitulé : *Les alliages et dépôts électrolytiques de radium.*

(Renvoi à l'examen de M. Villard.)

M. **A.-E. Mueller** adresse un Mémoire intitulé : *Claims of inventions. Aeroplane and dirigible of Capt. E.-E. Mueller.*

(Renvoi à la Commission d'Aéronautique.)

La séance est levée à 4 heures un quart.

G. D.

---

## BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

---

Ouvrages reçus dans la séance du 2 octobre 1911. (Suite.)

*Lines in the arc spectra of elements, arranged in the order of their wavelengths, from wavelength* 7950 *to wavelength* 2200, compiled by F. Stanley. Londres, Adam Hilger, 1911; 1 vol. in-8°.

*Die hygienischen Verhältnisse der Insel Formosa*, von T. Takaki. Dresde, C.-C. Meinhold et fils, 1911; 1 vol. in-8°.

Commissão geographica e geologica do Estado de São-Paulo. *Exploração do Rio Juqueryquerê*, 1911, São-Paulo, Rothschild et $C^{ie}$, 1911; 1 fasc. in-f°.

*Revista do Museu Paulista*, publicada por H. von Ihering, Director do Museu, t. VIII, São-Paulo, 1911; 1 vol. in-8°.

*The Tôhoku mathematical Journal*, edited by T. Hayashi; t. I, n° 1, july 1911; Sendai, Japan. Tôkyo, Y. Okura; 1 fas. in-8°.

*Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles*, publiées par la Société hollandaise des Sciences, à Harlem, et rédigées par J.-P. Lotsy; $3^e$ série, A (Sciences exactes), t. I, livr. 1 et 2. $3^e$ série, B (Sciences naturelles), t. I, livr. 1 et 2. La Haye, Martinus Nijhoff, 1911; 2 fasc. in-8°.

*Monthly weather Review*; t. XXXIX, n° 1, january, 1911, prepared under direction of Willis-L. Moore, Chief U. S. Weather Bureau. Washington, Government printing Office, 1911; 1 vol. in-4°.

---

## Ouvrages reçus dans la séance du 9 octobre 1911.

*Les Foraminifères dans le Tertiaire des Philippines*, par M. Henri Douvillé, Membre de l'Institut. (Extr. de *The Philippine Journal of Science*; t. VI, n° 2, section D, avril 1911.) Manille, 1911; 1 fasc. in-8°. (Hommage de l'auteur.)

*Fougères récoltées par M. Alluaud dans l'Afrique orientale en 1908-1909*, par S. A. le Prince Roland Bonaparte, Membre de l'Institut. (Extr. du *Bulletin du Muséum d'Histoire naturelle*, 1911, n° 3, p. 163.) 1 fasc. in-8°. (Hommage de l'auteur.)

*Opere scelte di* Amedeo Avogadro, pubblicate dalla R. Accademia delle Scienze di Torino. Turin, 1911; 1 vol. in-4°. (Exemplaire offert par l'Académie royale des Sciences de Turin; numéroté 13.)

Ministère des Colonies. *Documents de la Mission* Tilho, 1906-1909; t. II, et cartes 4, 5, 6 et 7. Paris, Imprimerie nationale, 1911; 1 vol. in-4° et une pochette contenant les cartes.

Observatoire de Bordeaux. *Catalogue photographique du Ciel : Coordonnées rectilignes;* Tome III : zone $+14°$ à $+16°$. Paris, Gauthier-Villars, 1911; 1 vol. in-4°.

*Sur la Flore dévonienne du bassin de la Basse-Loire*, par M. Édouard Bureau. (Extr. du *Bulletin de la Société des Sciences naturelles de l'Ouest de la France.*) Nantes, A. Dugas et $C^{ie}$, 1911; 1 fasc. in-8°. (Présenté par M. R. Zeiller. Hommage de l'auteur.)

*Die Flora der Trinil-Schichten. — Monographie der fossilen Flora der Pithecanthropus-Schichten. — Weltrichia und die Bennettitales. — Pagiophyllum Weissmanni im unteren Hauptmuschelkalk von Würzburg. — Ueber einen Fall von Bakterien-Plasmoptyse*, par M. Julius Schuster. 5 fasc. de divers formats. (Présenté par M. R. Zeiller. Hommage de l'auteur.)

*Études sur les localisations germinales et leur potentialité réelle dans l'œuf parthénogénétique de « Rana fusca »*, par A. Brachet. (Extr. des *Archives de Biologie;* t. XXVI, 1911.) Liége, H. Vaillant-Carmanne; 1 fasc. in-8°. (Hommage de l'auteur.)

Enseignement supérieur libre. *École française de Stomatologie : Programme de l'Enseignement;* 2e année scolaire, 1911-1912. Paris, impr. A. Leroy, 1911; 1 fasc. in-4°.

*The Algol-system RT Persei*, by Raymond-Smith Dugan. (*Contributions from the Princeton University Observatory;* n° 1 : *Photometric researches.*) Princeton, N. J., 1911; 1 fasc. in-4°.

*The american Ephemeris and Nautical Almanac, for the year* 1913. Washington, 1911; 1 vol. in-8°.

*Geological Notes*, by G. Henriksen. Christiania, Grondahl et fils, 1910; 1 fasc. in-12.

*Hydrocyanic-acid gas fumigation in California : Fumigation of Citrus trees*, by R.-S. Woglum. (U. S. Department of Agriculture. Bureau of Entomology; *Bulletin* n° 90, 1re partie, 13 mai 1911.) Washington; 1 fasc. in-8°.

*Materials for a flora of Formosa*, by B. Hayata. (*Journal of the College of Science, Imperial University of Tokyo;* t. XXX, art. I, 20 juin 1911.) Tokyo; 1 vol. in-4°.

*Digest of comments on the pharmacopœia of the United States of America and the national Formulary for the calendar year ending* 31 *december* 1911, by Murray Galt Motter and Martin I. Wilbert. Washington, Government Printing Office, 1911; 1 vol. in-8°.

*Proceedings of the Academy of natural Sciences of Philadelphia;* t. LXIII, part I, january-march, 1911. Philadelphie, 1911; 1 vol. in-8°.